Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática

Unificação das Interpretações Funcionais
via Lógica Linear Intuicionista

Sílvia da Conceição Alexandre Reis

Dissertação orientada por:
Prof. Doutor Fernando Jorge Inocêncio Ferreira
Prof. Doutora Gilda Maria Saraiva Dias Ferreira

Dissertação
Mestrado em Matemática

2014

Resumo

A presente dissertação em Lógica Matemática, enquadrada no âmbito da Teoria da Demonstração, centra-se no conceito de "interpretação funcional". Em termos informais, uma interpretação funcional consiste numa interpretação (de fórmulas de um sistema para fórmulas de outro sistema), que pode ser encarada como uma correspondência entre fórmulas e jogos, e num teorema que, intuitivamente, faz corresponder provas a estratégias vencedoras.

A terminologia "interpretação funcional" parece ser relativamente recente, mas o conceito (ou, no mínimo, exemplos concretos do mesmo) data pelo menos da década de 50. Com efeito, foi em 1958 que Gödel propôs a famosa interpretação *Dialectica*, e apenas um ano mais tarde surge a Realizabilidade Modificada de Kreisel. É sobre estas duas interpretações funcionais, juntamente com a variante da *Dialectica* mais tarde proposta por Diller e Nahm, que nos debruçamos ao longo deste texto.

O nosso principal objectivo é demonstrar que é possível apresentar as três interpretações funcionais do parágrafo anterior como "variantes" de uma única interpretação funcional, parametrizada. Para tal, introduziremos e motivaremos o contexto da Lógica Linear, criada por J.–Y. Girard e apresentada pela primeira vez em [17]. Estaremos em particular interessados na Lógica Linear Intuicionista, uma vez que é nesta lógica que será feita a unificação.

A unificação será obtida apresentando uma interpretação linear "básica", que representará a parte comum à realizabilidade modificada, à *Dialectica* e à variante de Diller–Nahm, juntamente com três instanciações de um parâmetro, que corresponderá ao que as diferencia.

Palavras–Chave

Lógica intuicionista; lógica linear intuicionista; interpretações funcionais; realizabilidade; unificação de interpretações funcionais; cálculo de sequentes.

Abstract

We present a dissertation in Mathematical Logic, specifically within the framework of Proof Theory, centered on the concept of *functional interpretation*. Informally, a functional interpretation consists of an interpretation, which maps formulas of a system into formulas of another system and which can be thought of as a correspondence between formulas and games, and a theorem, which, intuitively, associates proofs with winning strategies.

The terminology "functional interpretation" seems to be relatively recent, but the concept it represents (or, at least, specific examples of it) is known and studied since the fifties. It was indeed in 1958 that Gödel presented his famous *Dialectica* interpretation, and barely a year after that Kreisel introduced his Modified Realizability. These two functional interpretations, together with the *Dialectica* variant presented later by Diller and Nahm, will be the object of our study throughout the text.

Our main goal will be to show that it is possible to present the three functional interpretations mentioned above as "variants" of one parametrized functional interpretation. In order to do so, we will motivate and introduce the context of Linear Logic, first introduced by J.–Y. Girard in [17]. We will be specifically interested in Intuitionistic Linear Logic, since the unification will be obtained within this context.

The unification, as we will see, will be done by means of presenting a "basic" functional interpretation, representing the common part to modified realizability, *Dialectica* and Diller–Nahm's variant, together with three instantiations of a parameter, corresponding to what differentiates these interpretations.

Keywords

Intuitionistic logic; intuitionistic linear logic; functional interpretations; realizability; unifying functional interpretations; sequent calculus.

Agradecimentos

Gostaria de começar por expressar a minha gratidão profunda à Professora Gilda Ferreira. O seu apoio incansável, a sua simpatia e a sua disponibilidade foram essenciais na elaboração do presente texto, e são também, de um modo muito pessoal, uma inspiração para mim. As suas ideias e comentários ajudaram-me a ter uma visão mais clara e apurada da Lógica e dos conteúdos de algum modo essenciais ou próximos a esta dissertação, da motivação por detrás das ideias e dos resultados. Não posso ainda deixar de referir o quanto fiquei a ganhar, de tantas formas, por ter trabalhado tão proximamente com alguém que se dedica à Lógica tão completa e entusiasticamente.

Agradeço também profundamente ao Professor Fernando Ferreira, que despertou em mim o interesse pela Lógica e que desde aí tem contribuído incansavelmente para o manter e desenvolver. É um dos melhores professores que conheci; a sua clareza e – é importante referi-lo – o seu entusiasmo, a sua visão pessoal (que, julgo, transparece no seu discurso) da beleza desta área e o seu conhecimento vasto e profundo contribuíram de inúmeras formas para a minha formação. É uma honra poder trabalhar com alguém assim.

Uma palavra (muito, muito grande) de agradecimento à minha família, que me apoiou incondicionalmente e cujas palavras de encorajamento foram constantes, e essenciais em tantos momentos. Dois *obrigada* muito especiais aos meus pais – eles sabem a importância que têm – e à minha mana Diana. Diana: apesar de não saberes exactamente a importância real do meu trabalho, de tal coisa ser só uma ideia muito vaga no teu universo, cedeste-me gentilmente tanto do tempo que te devo, deste-me tantas palavras carinhosas e fizeste-me continuar. Obrigada.

Quero também agradecer à Inês e à Inês, uma parte do nosso Grupo-4 de Klein. Vocês estão, mesmo não estando sempre.

Por último, ao Filipe. As minhas palavras, tu sabe-lo, são demasiado pequenas; nelas não cabe tudo. Obrigada.

Prefácio

Esta dissertação enquadra-se no âmbito da Teoria da Demonstração, um dos quatro conhecidos pilares que actualmente suportam, e constituem, a Lógica Matemática. Nascida de questões filosóficas – afinal, a questão de definir, rigorosamente, o que *é* uma demonstração terá certamente ocorrido a qualquer pessoa a quem estas sejam familiares –, a Teoria da Demonstração evoluiu e veio a tornar-se o estudo rigoroso dos sistemas dedutivos e suas propriedades, com métodos e rigor matemáticos. A noção geral de *demonstrabilidade* (na Matemática) é aqui explorada através de sistemas dedutivos formais. Nas palavras de J. Barwise [3],

> The mathematician constructs proofs. The proof–theorist considers proofs themselves as mathematical objects and studies them with the tools of modern mathematics.

Estamos interessados no estudo de teorias matemáticas usando ferramentas essencialmente sintácticas (ainda que, naturalmente, de inspiração semântica) como traduções ou interpretações entre lógicas e teorias. É neste âmbito – mais concretamente, no enquadramento das interpretações funcionais – que é desenvolvido o presente texto. Informalmente, uma interpretação funcional consiste numa interpretação para as fórmulas de um dado sistema lógico, acompanhada (necessariamente) por um teorema – o Teorema da Correcção – que garante (em termos gerais) que, se o sistema interpretado demonstra uma fórmula, então o sistema de verificação (o sistema onde as fórmulas do primeiro são interpretadas) demonstra a interpretação dessa mesma fórmula.

Como o título indica, o propósito fundamental deste texto consistirá em apresentar uma unificação de três, bem conhecidas, interpretações funcionais. Uma das mais célebres interpretações funcionais será certamente aquela que veio a ser conhecida como *Dialectica*, após ter sido apresentada por Kurt Gödel na revista homónima em 1958. Uma sua profícua variante, que, contrariamente à *Dialectica*, não assume a decidibilidade das fórmulas atómicas, foi anos mais tarde proposta por Justus Diller e Werner Nahm. Qualquer tratado no domínio das interpretações funcionais não poderia ainda deixar de referir a bem conhecida realizabilidade modificada, interpretação proposta por George Kreisel, baseada na então conhecida realizabilidade, de Stephen Kleene.

É sobre as três referidas interpretações que nos debruçaremos nesta dissertação. Começaremos por descrevê-las no seu contexto habitual, a Aritmética de Heyting, posto o que dedicaremos a nossa atenção a apresentar e construir as ferramentas necessárias ao nosso objectivo último: construir e demonstrar a correcção de uma interpretação funcional parametrizada, no contexto da Lógica Linear Intuicionista, acompanhada por três instanciações do respectivo parâmetro, que corresponderão à realizabilidade modificada, à interpretação funcional de Gödel e à interpretação de Diller–Nahm. Os resultados de unificação que apresentamos baseiam-se sobretudo em [12].

Breve descrição do conteúdo

Começamos por apresentar, no Capítulo 1, o contexto em que surgem as três interpretações funcionais de maior relevo neste texto – a realizabilidade modificada, a *Dialectica* e a interpretação de Diller–Nahm –; isto é, a Lógica Intuicionista (sobre todos os tipos finitos) IL^{ω} e, em particular, a Aritmética de Heyting. Passamos então a descrever as interpretações, acompanhadas por alguns comentários relativos ao seu contexto histórico, alguma motivação (quando considerada necessária) e algumas das suas mais relevantes aplicações. Exporemos ainda, como aliás não poderíamos deixar de fazer, os respectivos Teoremas da Correcção e Caracterização; não apresentaremos contudo as (bem conhecidas!) demonstrações dos referidos Teoremas. Tal escolha tem as suas raízes em duas circunstâncias. Em primeiro lugar, são, como referido, demonstrações clássicas e bem conhecidas, que podem ser encontradas em qualquer texto de referência. Em segundo lugar, a interpretação funcional que proporemos mais tarde – e que constitui uma elegante unificação destas três – faz-se naturalmente acompanhar dos respectivos teoremas de correcção e caracterização, cuja demonstração detalhada apresentamos.

No Capítulo 2 encontrar-nos-emos num contexto diferente: não no âmbito da Lógica Intuicionista IL^{ω}, mas sim no âmbito da Lógica *Linear* Intuicionista (de novo, sobre todos os tipos finitos), ILL^{ω}, que começaremos por motivar e descrever. Esta mudança de contexto é de seguida justificada, ao apresentarmos uma tradução de IL^{ω} em ILL^{ω}. Demonstramos ainda que se trata efectivamente de uma imersão, e descrevemos também uma extensão de ILL^{ω}, que virá a ser essencial para a nossa interpretação unificadora, denotada por $\mathsf{ILL}^{\omega}_{b}$.

O início do Capítulo 3 é dedicado a apresentar, para um subsistema de ILL^{ω} onde (como veremos) as três interpretações funcionais que pretendemos unificar coincidem, uma interpretação funcional que designamos por *básica*. Enunciamos e demonstramos a sua correcção e a sua caracterização. Posto isto, estendemo-la de forma parametrizada a todo o sistema ILL^{ω} e demonstramos que, sob certas condições, esta interpretação é correcta.

Por fim, no Capítulo 4, apresentamos três diferentes instanciações da interpretação funcional parametrizada introduzida no Capítulo anterior. Demonstramos que todas elas verificam as condições que, segundo o Capítulo 3, asseguram a correcção das interpretações, garantindo assim que as três interpretações assim obtidas são correctas. Posto isto, e depois de alguns aperfeiçoamentos de ordem técnica, dedicamos as últimas secções a demonstrar que cada uma das instanciações apresentadas corresponde – quando combinada com uma imersão de IL^ω em ILL^ω – a uma das interpretações funcionais descritas no Capítulo 1. É assim conseguido o nosso objectivo fundamental de unificação.

Terminamos com algumas notas finais e referências ao que já foi feito, e resta ainda fazer, no âmbito da unificação de interpretações funcionais.

Índice

CAPÍTULO 1

Três Interpretações Funcionais em HA^ω

1.1 Lógica Intuicionista.

Ao longo do presente texto estaremos não raras vezes no contexto da Lógica Intuicionista de primeira ordem, cuja formalização e heurística apresentaremos nesta secção.

A *Lógica Intuicionista* é um sistema da lógica simbólica que diverge da Lógica Clássica ao estabelecer o seu ênfase, não no conceito de verdade, mas no conceito de *demonstrabilidade construtiva*. Originalmente motivada pelos trabalhos (e perspectivas) de L. E. J. Brouwer e A. Heyting, estes argumentaram que não é razoável considerar-se verdadeira ou falsa uma afirmação, independentemente do nosso conhecimento sobre a mesma. Uma afirmação deve ser verdadeira, segundo esta heurística, se nos for possível providenciar uma sua prova (prova esta necessariamente construtiva), e falsa se da suposição da existência de tal prova se obtiver uma contradição. Esta lógica distancia-se ainda mais da Lógica Clássica na medida em que sustenta que a manipulação formal de símbolos não constitui a essência da Matemática – e que não deve portanto ser tratada como tal – mas é, ao invés, somente um fenómeno secundário que resulta das nossas limitações enquanto seres humanos. O formalismo é então, no contexto desta lógica, rejeitado *per se*, ainda que a sua utilidade seja reconhecida no sentido em que permite formular princípios lógicos que estejam estritamente de acordo com (ou sejam resultantes de) o intuicionismo.

Na perspectiva intuicionista todo o objecto matemático é considerado uma construção mental e, portanto, poder-se-á afirmar que um tal objecto existe se, *e apenas se*, puder ser construído. Aqui a divergência em relação ao classicismo é por demais evidente, visto que, classicamente, pode provar-se que um objecto existe refutando a sua não existência. É claro que este princípio não é intuicionista – a refutação da não existência de um objecto não providencia uma construção do mesmo.

Estaremos particularmente interessados em estudar sistemas axiomáticos baseados na Lógica Intuicionista de primeira ordem IL, cuja linguagem passamos a descrever. Os símbolos lógicos utilizados serão $\wedge, \vee, \to, \perp$ – que denota o absurdo –, $\forall$ e $\exists$. A linguagem encontra-se munida de uma quantidade numerável de variáveis $x, y, z, \ldots$ e, para cada natural $n \geq 0$, de conjuntos contáveis de símbolos funcionais $f_1, f_2, \ldots$ de aridade n, e de conjuntos contáveis de símbolos relacionais $R_1, R_2, \ldots$ também de aridade n, aqui com $n \geq 1$. Como habitualmente, funções de aridade nula designam-se constantes e representam-se por $c_1, c_2, \ldots$.

O conjunto dos termos define-se, indutivamente, do modo habitual:

1. As variáveis e constantes da linguagem são termos;

2. Se $t_1, \ldots, t_n$ são termos e f é símbolo funcional de aridade n, então $f(t_1, \ldots, t_n)$ é termo.

Por sua vez, o conjunto das fórmulas é gerado pelas seguintes condições:

1. $\perp$ é uma fórmula;

2. Se $t_1, \ldots, t_n$ são termos e R é símbolo relacional de aridade n, então $R(t_1, \ldots, t_n)$ é fórmula;

3. Se φ, ψ são fórmulas, $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi$ e $\varphi \to \psi$ ainda são fórmulas;

4. Se φ é fórmula e x é variável, $\forall x\ \varphi$ e $\exists x\ \varphi$ são fórmulas.

No contexto intuicionista, $\neg\varphi$ é simplesmente uma abreviatura para $\varphi \to \perp$. Como habitualmente, $\varphi \leftrightarrow \psi$ é, por definição, a fórmula $\varphi \to \psi \wedge \psi \to \varphi$.

Do discutido no início desta secção se conclui forçosamente que é necessária uma nova – não clássica – interpretação para os símbolos lógicos de IL. A que apresentaremos, e que adoptaremos ao longo do texto, é a conhecida interpretação de Brouwer–Heyting–Kolmogorov, BHK, que traduz (informalmente) o significado de $\wedge, \vee, \to, \perp, \forall$ e $\exists$ em termos de *provas construtivas* – onde *prova* representa uma construção (do objecto) e não uma prova formal num sistema dedutivo. Assim,

1. Uma prova p de $\varphi \wedge \psi$ é um par (p_0, p_1), onde p_0 é prova de φ e p_1 é prova de ψ;

2. Uma prova p de $\varphi \vee \psi$ é um par da forma $(0, p_1)$, onde p_1 é prova de φ, ou da forma $(1, p_1)$, onde p_1 é prova de ψ;

3. Uma prova p de $\varphi \to \psi$ é uma construção que transforma qualquer (hipotética) prova a de φ numa prova $p(a)$ de ψ;

4. $\perp$ é uma proposição que não admite qualquer prova;

5. Uma prova p de $\forall x\ \varphi(x)$ é uma construção tal que, dado um elemento d do domínio, e uma sua construção c_d, produz uma prova $p(c_d)$ de $\varphi(d)$;

6. Uma prova p de $\exists x\ \varphi(x)$ é um par (c_d, q), onde c_d é uma construção de um elemento d do domínio, e q é uma prova de $\varphi(d)$.

Ao leitor familiarizado com o conceito de *realizabilidade* deixamos a seguinte nota: as suas muitas formas – duas das quais viremos a abordar ainda no presente capítulo – surgem a partir de diferentes formalizações das ideias por detrás da interpretação BHK.

Apresentamos de seguida os axiomas e regras de IL, usando o formalismo do *cálculo de sequentes*, uma família de sistemas formais originalmente introduzida por Gerhard Gentzen em [16][1], essencialmente como ferramenta para demonstrar a consistência da lógica de primeira ordem.

Gentzen apresentou o cálculo de sequentes tanto para a Lógica Clássica como para a Lógica Intuicionista. Na formulação mais geral (a clássica), cada linha de uma dedução – isto é, cada *sequente* – é uma estrutura da forma

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m \vdash \psi_1, \ldots, \psi_n$$

onde $\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \psi_1, \ldots, \psi_n$ são fórmulas da linguagem (com $m, n \in \mathbb{N}_0$). O símbolo $\vdash$ – obrigatoriamente presente em todos os sequentes da dedução – separa as hipóteses/antecedentes (à esquerda) das conclusões/consequentes (à direita); intuitivamente, deve ler-se o sequente acima como *a conjunção das fórmulas à esquerda implica a disjunção das fórmulas à direita.*

A passagem para a Lógica Intuicionista faz-se impondo uma única restrição: cada sequente deverá ter somente uma conclusão (fórmula à direita), continuando a poder ter qualquer número finito de hipóteses (fórmulas à esquerda). Visto que no presente texto dedicar-nos-emos à Lógica Intuicionista, todos os nossos sequentes serão então da forma

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m \vdash \psi.$$

Uma dedução no contexto do cálculo de sequentes consiste num esquema em forma de árvore; os nodos superiores, por vezes designados por folhas, são os *sequentes iniciais*, e transitamos de um sequente para o sequente imediatamente abaixo através de regras de inferência.

No que se segue, φ, ψ e θ representam fórmulas, Γ e Δ denotam sequências de fórmulas separadas por vírgulas e x é uma variável.

- Identidade: $\varphi \vdash \varphi$
- *Ex falso quodlibet*: $\perp \vdash \varphi$
- Enfraquecimento: $\dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \psi}$ (enfraq)

[1]Consulte-se [31] para uma tradução inglesa.

- Contracção: $$\frac{\Gamma, \varphi, \varphi, \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \psi}\ (\text{cont})$$

- Permutação: $$\frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Delta \vdash \theta}{\Gamma, \psi, \varphi, \Delta \vdash \theta}\ (\text{perm})$$

- Corte: $$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Delta, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \Delta \vdash \psi}\ (\text{corte})$$

- Regras para $\wedge$: $$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \theta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \theta}\ (\wedge\text{L}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Delta \vdash \psi}{\Gamma, \Delta \vdash \varphi \wedge \psi}\ (\wedge\text{R})$$

- Regras para $\vee$: $$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \theta \qquad \Delta, \psi \vdash \theta}{\Gamma, \Delta, \varphi \vee \psi \vdash \theta}\ (\vee\text{L})$$
$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ (\vee\text{R}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ (\vee\text{R})$$

- Regras para $\rightarrow$: $$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Delta, \psi \vdash \theta}{\Gamma, \Delta, \varphi \rightarrow \psi \vdash \theta}\ (\rightarrow\text{L}) \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}\ (\rightarrow\text{R})$$

- Regras para $\forall$: $$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \forall x\ \varphi \vdash \psi}\ (\forall\text{L}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi[a]}{\Gamma \vdash \forall x\ \varphi(x)}\ (\forall\text{R})$$

- Regras para $\exists$: $$\frac{\Gamma, \varphi[a] \vdash \psi}{\Gamma, \exists x\ \varphi(x) \vdash \psi}\ (\exists\text{L}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \exists x\ \varphi}\ (\exists\text{R})$$

Nas regras para $\forall$ e $\exists$, a representa uma *variável própria* – isto é, uma variável que não ocorre no sequente abaixo[2].

1.2 A Aritmética de Heyting sobre todos os tipos finitos, HA^ω

Em termos informais, a aritmética de Heyting – HA – é simplesmente uma axiomatização da aritmética de acordo com a heurística da Lógica Intuicionista, uma formalização dos princípios da teoria elementar *construtiva* dos números. HA está para a Lógica Intuicionista assim como a aritmética de Peano, PA, está para a Lógica Clássica.

Contudo, no presente texto estamos interessados em estudar, não o sistema HA, mas sim uma sua generalização, a aritmética de Heyting sobre todos os tipos finitos, HA^ω. Porquê? Sucede que nas interpretações funcionais que apresentamos, quando, em HA, se prova $\exists x\ \varphi$, estamos interessados em *testemunhar*

[2] O leitor interessado no conceito de variáveis próprias poderá encontrar em [32] (página 3, parágrafo *Eigenvariables and* ∇) uma curta mas interessante exposição.

essa existência; e, quando em HA se prova $\varphi \to \psi$, estamos interessados em apresentar "funções" que recebam testemunhas de φ e produzam testemunhas de ψ. Ora, imediatamente se percebe que este processo escala e que assim precisaremos não apenas de funções, mas de funcionais de ordem superior. Assim chegamos a HA^ω.

O conjunto $\mathbf{T}$ de todos os tipos finitos sobre $\mathbb{N}$ de HA^ω é o conjunto gerado, indutivamente, pelas seguintes cláusulas:

1. $0 \in \mathbf{T}$;

2. Se $\sigma, \rho \in \mathbf{T}$ então $\sigma \to \rho \in \mathbf{T}$.

Intuitivamente, cada tipo representa uma classe de objectos; 0 é o tipo de todos os números naturais; objectos de tipo $\sigma \to \rho$ são funcionais que aplicam objectos de tipo σ em objectos de tipo ρ.

A linguagem de HA^ω é constituída pelos seguintes elementos:

1. Uma quantidade numerável de variáveis $x^\sigma, y^\sigma, z^\sigma, \ldots$, para cada tipo σ;

2. Constantes da linguagem: 0^0, o sucessor $S^{0\to 0}$, as projecções $\Pi_{\sigma,\rho}$ de tipo $\sigma \to \rho \to \sigma$, os combinadores $\Sigma_{\sigma,\rho,\tau}$ de tipo $(\sigma \to \rho \to \tau) \to (\sigma \to \rho) \to \sigma \to \tau$, e os recursores R_σ, de tipo $0 \to \sigma \to (\sigma \to 0 \to \sigma) \to \sigma$;

3. Símbolos lógicos: $\wedge, \vee, \to, \perp$ e, para cada tipo σ, os quantificadores $\exists x^\sigma$ e $\forall y^\sigma$;

4. Um símbolo relacional binário $=_0$, para igualdade entre objectos de tipo 0.

Os termos de HA^ω são definidos, indutivamente, do seguinte modo:

1. As constantes de tipo σ e as variáveis de tipo σ são termos de tipo σ;

2. Se $t^{\sigma\to\rho}$ é termo de tipo $\sigma \to \rho$, e s^σ é termo de tipo σ, então $(ts)^\rho$ é termo de tipo ρ.

Observamos que todos os termos de HA^ω têm um, e um só, tipo. Assim sendo, quando é claro o tipo dos termos que estamos a considerar, optamos por omitimo-lo, escrevendo apenas t em vez de t^σ, se t é termo de tipo σ.

Por sua vez, as fórmulas de HA^ω definem-se, por indução, através das duas cláusulas seguintes:

1. $\perp$ é fórmula atómica, e expressões da forma $s^0 =_0 t^0$, com s^0, t^0 termos de tipo 0, são fórmulas atómicas. As fórmulas atómicas são fórmulas;

2. Se φ e ψ são fórmulas, então $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$ e $\varphi \to \psi$ ainda são fórmulas;

3. Se φ é fórmula e x^σ é variável de tipo σ, então $\exists x^\sigma \varphi$ e $\forall x^\sigma \varphi$ ainda são fórmulas.

Apresentamos, por último, os axiomas e regras de HA^ω:

1. Os axiomas e regras da Lógica Intuicionista IL, apresentados anteriormente;

2. Os axiomas da igualdade $=_0$; dada φ fórmula atómica,

   - $x^0 =_0 x^0$;
   - $(x^0 =_0 y^0 \wedge \varphi[x/w]) \to \varphi[y/w]$.

3. Os axiomas (usuais) para o sucessor S: $S(x^0) \neq 0^0$ e $S(x^0) = S(y^0) \to x^0 = y^0$;

4. Axiomas para $\Pi_{\sigma,\rho}, \Sigma_{\sigma,\rho,\tau}$ e R_σ: dada φ fórmula atómica,

   (Π): $\varphi\left[(\Pi_{\sigma,\rho}\, x^\sigma y^\rho)/w\right] \leftrightarrow \varphi[x^\sigma/w]$;

   (Σ): $\varphi\left[(\Sigma_{\sigma,\rho,\tau} xyz)/w\right] \leftrightarrow \varphi[(xz(yz))\,/w]$, com $x^{\sigma\to(\rho\to\tau)}, y^{\sigma\to\rho}$ e z^σ;

   (R): $\left\{\begin{array}{l} \varphi\left[(R_\sigma 0^0 yz)/w\right] \leftrightarrow \varphi[y/w] \\ \varphi\left[(R_\sigma(S(x^0))yz)/w\right] \leftrightarrow \varphi[(z(R_\sigma xyz)x)/w] \end{array}\right.$, com y^σ e $z^{(\sigma\to 0)\to\sigma}$.

5. Axioma-esquema de indução:
   $IA : \varphi(0^0) \wedge \big(\forall x^0 \left(\varphi(x^0) \to \varphi(S(x^0))\right) \to \forall x^0 \varphi(x)\big)$.

Importa referir que, embora os axiomas para $=_0, \Pi, \Sigma$ e R estejam formulados para fórmulas atómicas, prova-se que são verdadeiros para qualquer fórmula da linguagem.

Se t for um termo e φ for uma fórmula de HA^ω, representamos por $FV(t)$ e $FV(\varphi)$ o conjunto das variáveis de t e o conjunto das variáveis livres de φ (definidos da forma usual), respectivamente. Um termo diz-se fechado se nele não ocorrem variáveis, e uma fórmula diz-se fechada se nela não ocorrem variáveis livres.

A existência das projecções $\Pi_{\sigma,\rho}$ e dos combinadores $\Sigma_{\sigma,\rho,\tau}$ permite-nos ter λ–abstracções, definidas do seguinte modo por indução na complexidade dos termos:

1. $\lambda x^\sigma.x := \Sigma_{\sigma,0\to\sigma,\sigma}\Pi_{\sigma,0\to\sigma}\Pi_{\sigma,0}$;

2. $\lambda x^\sigma.t^\rho := \Pi_{\rho,\sigma} t$, se $x \notin FV(t)$;

3. $\lambda x^\sigma.(t^{\rho\to\tau} s^\rho) := \Sigma_{\sigma,\rho,\tau}(\lambda x.t)(\lambda x.s)$, se $x \in FV(ts)$.

Assim, dados x^σ uma variável e t^ρ um termo, usamos a notação $\lambda x.t$ para denotar o termo acima, de tipo $\sigma \to \rho$.

Enunciamos, sem demonstração, o seguinte resultado sobejamente conhecido, que utilizaremos com frequência no Capítulo 3:

Lema 1.1. *Seja x^σ uma variável de tipo σ, e sejam s^ρ, t^τ termos de tipo ρ e τ, respectivamente. Seja ainda φ uma fórmula arbitrária de IL^ω. Tem-se:*

$$\varphi[((\lambda x.t)s)/w] \leftrightarrow \varphi[(t[s/x])/w].$$

Em particular, $\varphi[((\lambda x.t)x)/w] \leftrightarrow \varphi[t/w]$.

A construção detalhada, bem como a demonstração do lema acima, podem ser encontrados, por exemplo, em [14].

1.2.1 Algumas Definições.

Tendo exposto na secção anterior a linguagem de HA^ω, a presente terá como objectivo apresentar, nessa linguagem, alguns princípios e axiomas de que necessitaremos mais tarde.

Definição 1.2. Uma fórmula φ de HA^ω diz-se $\exists$–livre se φ é construída a partir de fórmulas atómicas utilizando apenas os símbolos lógicos $\wedge, \to$ e $\forall$.

Observamos que, por definição, as fórmulas $\exists$-livres são também livres de disjunções.

Relembramos que $\mathbf{T}$ representa o conjunto dos tipos da linguagem de HA^ω. Passamos agora a apresentar alguns princípios lógicos bem conhecidos:

Definição 1.3. (Axioma da Escolha.)

O axioma–esquema da escolha AC define-se do seguinte modo:

$$AC := \bigcup_{\sigma,\rho \in \mathbf{T}} \{AC^{\sigma,\rho}\}$$

onde

$$AC^{\sigma,\rho} := \forall x^\sigma \exists y^\rho\ \varphi(x,y) \to \exists f^{\sigma\to\rho} \forall x^\sigma\ \varphi(x, f(x)),$$

para φ fórmula arbitrária de HA^ω.

Definição 1.4. (Independência de Premissas.)

O esquema da Independência de Premissas para fórmulas $\exists$-livres, $IP_{\exists\mathsf{f}}$, é dado por:

$$IP_{\exists\mathsf{f}} := \bigcup_{\sigma \in \mathbf{T}} \{IP^\sigma_{\exists\mathsf{f}}\}$$

onde

$$IP_{\exists \mathsf{f}}^{\sigma} := (\varphi \to \exists x^\sigma \psi(x)) \to \exists x^\sigma (\varphi \to \psi(x)),$$

com φ fórmula $\exists$-livre tal que x não ocorre livre em φ.

Denotamos por $IP_{\forall}^{\sigma}$ a Independência de Premissas para fórmulas universais, isto é, IP para fórmulas φ da forma $\forall y^\rho\, \theta$, onde θ é livre de quantificações. Assim,

$$IP_{\forall} := \bigcup_{\sigma \in \mathbf{T}} IP_{\forall}^{\sigma},$$

como se esperaria.

Definição 1.5. (Princípio de Markov.)
O princípio de Markov sobre todos os tipos finitos é o esquema

$$M := \bigcup_{\sigma \in \mathbf{T}} \{M^\sigma\}$$

onde

$$M^\sigma := \neg\neg\exists \mathbf{x}^\sigma\ \varphi(\mathbf{x}) \to \exists \mathbf{x}^\sigma \varphi(\mathbf{x}),$$

com φ uma fórmula livre de quantificações de HA^ω e $\mathbf{x}$ uma sequência finita de variáveis de tipos arbitrários σ.

Tendo exposto acima a Aritmética de Heyting sobre todos os tipos finitos, dedicaremos as próximas secções a apresentar as interpretações funcionais que dão título ao presente capítulo.

1.3 A Realizabilidade Modificada de G. Kreisel

1.3.1 Resenha Histórica

Em 1945, no seu artigo *On the Interpretation of Intuitionistic Number Theory* ([22]), S. Kleene apresenta o primeiro elemento de uma família de interpretações cujas ramificações continuam a aparecer ainda hoje em dia, e cuja contribuição para o estabelecimento de resultados é inestimável – a realizabilidade. Na década de 40, a Lógica Intuicionista era já conhecida e estudada há mais de trinta anos e, simultaneamente, a teoria das funções recursivas começava a ter impacto na comunidade matemática; Kleene notou que ambas apresentavam semelhanças, na medida em que enfatizavam a importância de extrair informação de forma *efectiva*, ou *construtiva*. Procurou então atribuir um significado rigoroso a esta aparente ligação entre as duas áreas - nas suas palavras, "It struck me the situation would be very anomalous if there were not some precise connection.".

Tal significado rigoroso veio a concretizar-se através da sua *Realizabilidade* – uma interpretação funcional que utiliza números naturais como *realizadores* para fórmulas da Aritmética de Heyting. Não apresentaremos aqui a sua formalização, que o leitor interessado poderá encontrar em [22]; é contudo relevante referir o seguinte teorema:

Teorema 1.6. *Seja φ uma fórmula da Aritmética de Heyting,* HA*. Se φ é demonstrável em* HA*, existe um número natural n tal que n realiza φ.*

Saliente-se, contudo, que existem fórmulas realizáveis que não são demonstráveis em HA.

Importa também observar que a realizabilidade providencia um significado concreto (e significativo, do ponto de vista clássico) da definição intuicionista de verdade. Mais, o conjunto das afirmações realizáveis é fechado para a dedução intuicionista e é necessariamente consistente, visto que a fórmula $1 = 0$ não pode ser realizada. De referir ainda que existem princípios não clássicos que são realizáveis; e assim a realizabilidade mostra como se podem incorporar, na matemática construtivista, princípios que a fazem divergir da teoria clássica.

A realizabilidade modificada, interpretação funcional proposta por Kreisel no seu artigo *Interpretation of Analysis by Means of Constructive Functionals of Finite Type* ([23]), surge como uma generalização da versão original de realizabilidade de Kleene. Kreisel pretendia obter uma prova de consistência para HA^ω, usando, para tal, uma extensão para este sistema da realizabilidade de Kleene. Outro dos objectivos principais de Kreisel ao propôr esta interpretação funcional consistia em provar a independência do princípio de Markov em relação à aritmética de Heyting – e tem-se, de facto, que tal princípio não é derivável no contexto da Lógica Intuicionista.

Na sua versão abstracta, a realizabilidade modificada fornece uma interpretação de HA^ω em si mesmo; essa interpretação pode contudo ser especializada, através da especificação de um modelo para os objectos de tipo finito.

É possível interpretar HA^ω em HA e, portanto, utilizando esta interpretação, podemos obter uma realizablidade modificada para HA. Mencionamos aqui, embora sem o justificar, que tal realizabilidade modificada se vem a revelar substancialmente diferente da realizabilidade (em HA) de Kleene – apesar de aquela ter tido a sua origem numa generalização desta para tipos superiores!

1.3.2 Formalização

A realizabilidade modificada formaliza-se do seguinte modo. A cada fórmula φ de HA^ω fazemos corresponder a fórmula $\varphi^{\mathsf{mr}} :\equiv \exists \mathbf{x}\, (\mathbf{x} \;\mathsf{mr}\; \varphi)$, onde $\mathbf{x}$ é uma sequência (finita) de variáveis que não ocorrem em φ. A fórmula $\mathbf{x} \;\mathsf{mr}\; \varphi$ – lê-se "$\mathbf{x}$ realiza modificadamente φ" – é definida, indutivamente, pelas seguintes condições:

(i) Se φ é fórmula atómica, $\mathbf{x}$ é a sequência vazia e $\mathbf{x} \;\mathsf{mr}\; \varphi :\equiv \varphi$;

(ii) $\mathbf{x}, \mathbf{y}\ \mathsf{mr}\ \varphi \wedge \psi :\equiv\ \mathbf{x}\ \mathsf{mr}\ \varphi\ \wedge\ \mathbf{y}\ \mathsf{mr}\ \psi$;

(iii) $\mathbf{x}, \mathbf{y}, c^0\ \mathsf{mr}\ \varphi \vee \psi :\equiv (c = 0 \rightarrow\ \mathbf{x}\ \mathsf{mr}\ \varphi) \wedge (c = 1 \rightarrow\ \mathbf{y}\ \mathsf{mr}\ \psi)$;

(iv) $\mathbf{f}\ \mathsf{mr}\ \varphi \rightarrow \psi :\equiv \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{x}\ \mathsf{mr}\ \varphi \rightarrow\ \mathbf{fx}\ \mathsf{mr}\ \psi)$;

(v) $\mathbf{f}\ \mathsf{mr}\ \forall z\ \varphi :\equiv \forall z\ (\mathbf{f}z\ \mathsf{mr}\ \varphi)$;

(vi) $\mathbf{x}, z\ \mathsf{mr}\ \exists z\ \varphi :\equiv\ \mathbf{x}\ \mathsf{mr}\ \varphi(z)$.

Observamos que, na fórmula $\mathbf{x}\ \mathsf{mr}\ \varphi$, o tipo das variáveis em $\mathbf{x}$ fica completamente determinado pela forma lógica de φ; a título de exemplo, se φ tem realizador de tipo σ, e ψ tem realizador de tipo ρ, então $\varphi \rightarrow \psi$ terá realizador de tipo $\sigma \rightarrow \rho$.

O seguinte resultado demonstra-se com facilidade por indução na complexidade da fórmula φ.

Proposição 1.7. *Seja φ uma formula de HA^ω. Então:*

1. *Se φ é $\exists$–livre, então $\mathbf{x}\ \mathsf{mr}\ \varphi \equiv \varphi$ e $\mathbf{x}$ é a sequência vazia;*

2. *$\mathbf{x}\ \mathsf{mr}\ \varphi$ é sempre uma fórmula $\exists$–livre.*

Notamos que a proposição anterior garante que as fórmulas $\exists$–livres se realizam a si próprias.

Não poderíamos deixar de expôr ainda os dois teoremas fulcrais que acompanham esta (e qualquer uma) interpretação funcional: o Teorema da Correcção e o Teorema da Caracterização. Pelos motivos referidos na Introdução, não apresentaremos as respectivas demonstrações; estas podem ser encontradas, a título de exemplo, em [24] e [33].

Teorema 1.8. *(Teorema da Correcção.)*

Seja Γ uma sequência finita de fórmulas $\exists$–livres de HA^ω, e φ uma fórmula de HA^ω.

Se $\mathsf{HA}^\omega + AC + IP_{\exists\mathsf{f}} + \Gamma \vdash \varphi$, então existem (e é efectivamente possível encontrar) termos $\boldsymbol{t}$ tais que $\mathsf{HA}^\omega + \Gamma \vdash \boldsymbol{t}\ mr\ \varphi$.

Teorema 1.9. *(Teorema da Caracterização.)*

Para toda a fórmula φ de HA^ω,

$$\mathsf{HA}^\omega + AC + IP_{\exists\mathsf{f}} \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi^{\mathsf{mr}}.$$

1.3.3 Algumas Aplicações

Nesta secção apresentamos alguns resultados proporcionados pela realizabilidade modificada. Não apresentaremos as suas demonstrações, atendendo ao seu carácter bem conhecido; deixaremos contudo referências para o leitor interessado.

Teorema 1.10. *(Aplicações da realizabilidade modificada.)* [Troelstra, [35]] *Denotemos por* H *o sistema* $\mathsf{HA}^\omega + IP_{\exists \mathsf{f}} + AC$. *Tem-se o seguinte:*

1. H *é consistente.*
2. *Seja* $\varphi \vee \psi$ *fórmula fechada. Se* $\mathsf{H} \vdash \varphi \vee \psi$, *então* $\mathsf{H} \vdash \varphi$ *ou* $\mathsf{H} \vdash \psi$. *(Propriedade da Disjunção)*
3. *Se* $\mathsf{H} \vdash \exists x^\sigma\ \varphi$, *então* $\mathsf{H} \vdash \varphi[t^\sigma/x]$, *para um termo* t *apropriado, com* $FV(t) \subseteq FV(\varphi)\backslash\{x\}$. *(Propriedade da Existência)*
4. *Se* $\mathsf{H} \vdash \forall x^\sigma\ \exists y^\rho\ \varphi(x,y)$, *então* $\mathsf{H} \vdash \exists f^{\sigma \to \rho} \forall x^\sigma\ \varphi(x, f(x))$. *(Regra da Escolha)*
5. *Se* φ *é fórmula* $\exists$*–livre e* $\mathsf{H} \vdash (\varphi \to \exists x^\sigma\ \psi)$, *então* $\mathsf{H} \vdash \exists x^\sigma\ (\varphi \to \psi)$. *(Regra da Independência de Premissas para fórmulas* $\exists$*–livres)*

Uma conhecida variante da realizabilidade modificada é a realizabilidade modificada *com verdade*, que o leitor interessado poderá encontrar, por exemplo, em [24] e [35]. A realizabilidade modificada com verdade proporciona-nos, como aplicação, uma versão mais forte do teorema anterior; com efeito, o teorema anterior é ainda verdadeiro tomando para H o sistema $\mathsf{HA}^\omega \pm IP_{\exists \mathsf{f}} \pm AC$.

Entre outras aplicações da realizabilidade modificada salientamos os trabalhos de R. E. Vesley ([38]), que utiliza mr para obter a consistência da análise intuicionista com uma forma restrita do princípio da Independência das Premissas, e de J. Moschovakis ([26]), que obtém, também através de mr, a consistência de uma versão fraca da tese de Church.

1.4 A *Dialectica* de K. Gödel

1.4.1 Resenha Histórica

Ao longo desta secção basear-nos-emos no excelente artigo [7], de S. Feferman.

Curiosamente, aquela que é provavelmente a mais conhecida interpretação funcional nasceu como tentativa de demonstrar a consistência da aritmética clássica (PA, Aritmética de Peano) através da aritmética intuicionista, já que Gödel havia demonstrado, com a sua *tradução negativa*, que a primeira se reduz à segunda.

Em 1958, por ocasião do septuagésimo aniversário de Paul Bernays, Gödel publica na revista *Dialectica* um artigo no qual apresenta aquela que é talvez a mais célebre interpretação funcional, e que acabou por ficar conhecida como a interpretação *Dialectica* de Gödel. As ideias por detrás deste artigo, contudo, remontam pelo menos até 1941, e a história e motivação por detrás do mesmo são tão ricas e relevantes que considerámos indispensável apresentá-las.

A longa e fascinante história por detrás da *Dialectica* começa possivelmente em 1933, com uma palestra apresentada por Gödel em Cambridge, Massachusetts, intitulada "The present situation in the foundation of mathematics". Nela, Gödel argumenta que qualquer prova da consistência de um conjunto de axiomas num sistema dedutivo que pudesse constituir uma fundação para a Matemática teria que usar métodos *não questionáveis* – em particular, a utilização de raciocínios não construtivos em provas de existência e a presença de definições impredicativas não poderiam alguma vez ser métodos utilizados.

Assim, uma prova de consistência deveria ser obtida apenas através de métodos construtivos. Existem diferentes níveis de profundidade no construtivismo, o mais baixo dos quais será o finitismo de D. Hilbert. Contudo, e ao contrário do esperado por este último, Gödel não acreditava que os métodos finitistas pudessem proporcionar uma demonstração de consistência dos fundamentos da Matemática – de facto, nem sequer da aritmética clássica! –, argumentando que os métodos finitistas conhecidos ou que se esperavam vir a conhecer eram suficientemente simples para serem implementados na aritmética clássica que, como se sabe desde o Segundo Teorema da Incompletude, não demonstra a sua própria consistência.

A solução – então deixada em aberto – passaria assim por encontrar métodos construtivistas menos exigentes que o finitismo, que teriam necessariamente que permitir alguma noção abstracta (tendo em conta, novamente, o Segundo Teorema da Incompletude e também – um argumento meta-lógico mas ainda assim não desprovido de relevância – a nossa experiência com demonstrações de consistência, em que é sempre necessário introduzir uma noção abstracta). Em 1938, num seminário informal em Viena organizado por Edgar Zilsel, Gödel regressa a esta ideia de "generalizar" as ideias finitistas e propõe efectivamente candidatos para provas de consistência construtivas. Uma das possibilidades consideradas terá sido um primeiro passo para o surgimento da *Dialectica*: a utilização de funcionais de tipo superior.

É só em 1941, contudo, que esta interpretação funcional faz a sua aparição de uma forma mais organizada e definitiva. É numa palestra na Universidade de Yale que Gödel apresenta efectivamente a heurística por detrás da sua *Dialectica*, começando por propôr três novos critérios para a construtividade, que constituiriam generalizações dos critérios finitistas mas não seriam, ainda assim, demasiado abstractos ou indefinidos para os seus propósitos. São eles os seguintes:

1. Todas as funções primitivas teriam que ser calculáveis para qualquer argumento dado, e todas as relações primitivas teriam que ser decidíveis para qualquer argumento dado;

2. As asserções existenciais devem ser encaradas somente como abreviaturas de construções que permitam obter (efectivamente) uma testemunha;

3. Devido ao ponto (2), e ao contrário do que acontecia no contexto do programa de Hilbert, asserções universais podem ser negadas desde que exista um contra-exemplo no sentido descrito no último ponto.

A generalização fundamental aqui presente é o facto de não se exigir que as variáveis quantificadas universalmente tenham como domínio totalidades cujos elementos sejam gerados por procedimentos finitos. De facto, Gödel descreveu mais tarde a sua utilização de funcionais de tipos superiores como uma (nova) extensão dos métodos finitistas. Juntando a isto o argumento de que (apesar de o intuicionismo não satisfazer as três condições acima) "in its applications to mathematical systems intuitionistic logic can be reduced to finitistic systems" nasce a interpretação funcional de Gödel.

1.4.2 Formalização

A cada fórmula φ da linguagem da aritmética HA^ω associamos a sua interpretação *Dialectica* φ^D, onde $\varphi^D :\equiv \exists \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ \varphi_D$, com φ_D fórmula livre de quantificadores. As variáveis livres de φ_D são as variáveis livres de φ, juntamente com as sequências finitas (e possivelmente vazias) de variáveis $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Suponha-se que $\varphi^D \equiv \exists \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ \varphi_D(\mathbf{x};\mathbf{y})$ e $\psi^D :\equiv \exists \mathbf{v}\ \forall \mathbf{v}\ \psi_D(\mathbf{v};\mathbf{w})$. As correspondências $(\cdot)^D$ e $(\cdot)_D$ definem-se, indutivamente, do seguinte modo:

(i) Se φ é atómica, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são ambas vazias e $\varphi^D = \varphi_D = \varphi$;

(ii) $(\varphi \wedge \psi)^D = \exists \mathbf{x}\ \exists \mathbf{v}\ \forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{w}\ (\varphi_D(\mathbf{x};\mathbf{y}) \wedge \psi_D(\mathbf{v};\mathbf{w}))$;

(iii) $(\varphi \vee \psi)^D = \exists \mathbf{x}\ \exists \mathbf{v}\ \exists z\ \forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{w}\ ((z = 0 \to \varphi_D(\mathbf{x};\mathbf{y})) \wedge (z = 1 \to \psi_D(\mathbf{v};\mathbf{w})))$;

(iv) $(\varphi \to \psi)^D = \exists \mathbf{f}\ \exists \mathbf{g}\ \forall \mathbf{x}\ \forall \mathbf{w}\ (\varphi_D(\mathbf{x};\mathbf{fxw}) \to \psi_D(\mathbf{gx};\mathbf{w}))$;

(v) $(\forall z\ \varphi)^D = \exists \mathbf{f}\ \forall \mathbf{y}\ \forall z\ \varphi_D(\mathbf{f}z;\mathbf{y})$;

(vi) $(\exists z\ \varphi)^D = \exists \mathbf{x}\ \exists z\ \forall \mathbf{y}\ \varphi_D(\mathbf{x};\mathbf{y})$.

É possível demonstrar, por indução na complexidade de φ, que $(\varphi^D)^D \equiv \varphi^D$. Observamos que, visto que $\neg\varphi :\equiv \varphi \to \bot$, se tem $(\neg\varphi)^D = \exists \mathbf{f}\ \forall \mathbf{x}\ \neg\varphi(\mathbf{x};\mathbf{fx})$.

Teorema 1.11. *(Teorema da Correcção)*

Seja φ *fórmula de* HA^ω *e* Γ *conjunto de fórmulas de* HA^ω *da forma* $\forall x\ \psi$, *onde* ψ *é fórmula livre de quantificadores.*

Se $\mathsf{HA}^\omega + AC + IP_\forall + M + \Gamma \vdash \varphi$, *então existem termos* $\mathbf{t}$ *tais que* $\mathsf{HA}^\omega + \Gamma \vdash \forall \mathbf{y}\ \varphi_D(\mathbf{t}; \mathbf{y})$.

Teorema 1.12. *(Teorema da Caracterização)*

Para toda a fórmula φ *de* HA^ω,

$$\mathsf{HA}^\omega + AC + IP_\forall + M \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi^D.$$

1.4.3 Uma Aplicação da *Dialectica*

Teorema 1.13. *(Extracção de programas através da* Dialectica.*)*
Seja Γ *um conjunto de fórmulas de* HA^ω *da forma* $\forall \mathbf{w}^\tau\ \theta(\mathbf{w})$, *com* θ *livre de quantificadores. Seja* $\varphi(x^\sigma, y^\rho)$ *fórmula livre de quantificadores cujas únicas variáveis livres são* x *e* y, *e seja* $\psi(x^\sigma, z^\delta)$ *fórmula arbitrária cujas únicas variáveis livres são* x *e* z.

Se $\mathsf{HA}^\omega + AC + IP_\forall + M + \Gamma \vdash \forall x^\sigma \big(\forall y^\rho\ \varphi(x,y) \rightarrow \exists z^\delta\ \psi(x,z)\big)$, *então pode extrair-se um termo fechado* t *de* HA^ω *tal que*

$$\mathsf{HA}^\omega + AC + IP_\forall + M + \Gamma \vdash \forall x^\sigma\, (\forall y^\rho\ \varphi(x,y) \rightarrow \psi(x, tx)).$$

Este resultado é ainda válido para sequências finitas de variáveis $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, *e neste caso* $\mathbf{t}$ *é uma sequência finita de termos fechados.*

Ao leitor interessado em conhecer mais algumas vantagens e aplicações da *Dialectica* de Gödel recomendamos vivamente que consulte [7] e [24].

Importa ainda referir que a interpretação *Dialectica*, quando combinada com argumentos de majorabilidade, é prolífera em aplicações, como testemunha o trabalho de U. Kohlenbach. Destacamos ainda que o trabalho de Gödel pode ser estendido a uma teoria de ordinais abstractos construtíveis (veja-se, por exemplo, [2], [8] e [21]).

1.5 A Interpretação de Diller-Nahm

1.5.1 Resenha Histórica

A interpretação funcional de Diller-Nahm, proposta por J. Diller e W. Nahm no seu artigo intitulado *Eine Variante Zur Dialectica–Interpretation Der Heyting–Arithmetik Endlicher Typen*, surge como uma modificação da *Dialectica* – modificação esta fundamental mas de aspecto suave, uma vez que a única alteração se dá na cláusula implicacional, e considerando que se obtêm teoremas de correcção e caracterização semelhantes aos já apresentados para a interpretação funcional de Gödel.

Para motivar a introdução desta alteração, consideremos novamente a regra da contracção de IL:

$$\frac{\varphi, \varphi \vdash \psi}{\varphi \vdash \psi}$$

Naturalmente, o Teorema da Correcção para a *Dialectica* inclui, na sua demonstração, uma cláusula que diz respeito a esta regra. A prova segue o seguinte esquema: supomos o teorema verdadeiro para a primeira linha, e portanto existem termos $\mathbf{r}, \mathbf{s}$ e $\mathbf{t}$ tais que

$$\varphi_D(\mathbf{x}; \mathbf{r}), \varphi_D(\mathbf{x}; \mathbf{s}) \vdash \psi_D(\mathbf{t}; \mathbf{y}) \quad ,$$

e pretende obter-se o resultado para a segunda linha; isto é, queremos encontrar termo $\mathbf{u}$ tal que

$$\varphi_D(\mathbf{x}; \mathbf{u}) \vdash \psi_D(\mathbf{t}; \mathbf{y}).$$

Raciocinamos então do seguinte modo. Se $\psi_D(\mathbf{t}; \mathbf{y})$ for verdadeira, nada há a demonstrar e o resultado sai de imediato. Se $\psi_D(\mathbf{t}; \mathbf{y})$ for falsa, é necessário arranjar um termo u tal que $\varphi_D(\mathbf{x}; \mathbf{u})$ seja falso. Ora, sabemos, por hipótese, que um dos termos $\mathbf{r}$ ou $\mathbf{s}$ fará o pretendido – mas não qual. A *Dialectica* exigiria assim que definissemos u da seguinte forma:

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{r}, \text{ se } \neg\varphi_D(\mathbf{x}; \mathbf{r}) \text{ é verdadeiro;} \\ \mathbf{s}, \text{ caso contrário.} \end{cases} \quad .$$

(Observamos, de passagem, que esta divisão por casos é legítima visto que o processo de verificar, em HA^ω, se tais fórmulas são verdadeiras, é decidível – estamos, afinal, a falar de fórmulas da aritmética livres de quantificadores. Se não o fossem, contudo, não poderiam ser interpretadas com correcção pela *Dialectica*!.)

Diller e Nahm, contudo, resolvem a questão de forma diferente – que não passa por uma divisão em casos, pelo que a decidibilidade ou não das fórmulas em questão deixará de ser relevante. Sabe-se que um dos termos $\mathbf{r}$ ou $\mathbf{s}$ providenciará um contra-exemplo, embora não saibamos qual deles; nesta interpretação coleccionamos simplesmente os dois. Nesta elegante alternativa ao método da *Dialectica* a ideia é que $\mathbf{u}$ funcione como uma espécie de *colecção* de ambas as possibilidades: "$\mathbf{u} = \{\mathbf{r}, \mathbf{s}\}$".

1.5.2 Interpretação

O intuito desta secção não é apresentar a interpretação de Diller–Nahm de forma completamente rigorosa, mas sim motivar a sua génese. No que se segue, usamos a relação $y \in x$ para indicar que y é um dos elementos coleccionados em x.

Admitamos que $\varphi^{\mathsf{dn}} \equiv \exists \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ \varphi_{\mathsf{dn}}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ e $\psi^{\mathsf{dn}} :\equiv \exists \mathbf{u}\ \forall \mathbf{v}\ \psi_{\mathsf{dn}}(\mathbf{v};\mathbf{w})$. As correspondências $(\cdot)^{\mathsf{dn}}$ e $(\cdot)_{\mathsf{dn}}$ definem-se, indutivamente, do seguinte modo:

(i) Se φ é atómica, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são ambas vazias e $\varphi^D = \varphi_D = \varphi$;

(ii) $(\varphi \wedge \psi)^D = \exists \mathbf{x}\ \exists \mathbf{v}\ \forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{w}\ (\varphi_D(\mathbf{x};\mathbf{y}) \wedge \psi_D(\mathbf{v};\mathbf{w}))$;

(iii) $(\varphi \vee \psi)^D = \exists \mathbf{x}\ \exists \mathbf{v}\ \exists z\ \forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{w}\ ((z = 0 \to \varphi_D(\mathbf{x};\mathbf{y})) \wedge (z = 1 \to \psi_D(\mathbf{v};\mathbf{w})))$;

(iv) $(\varphi \to \psi)^{\mathsf{dn}} = \exists \mathbf{f}\ \exists \mathbf{g}\ \forall \mathbf{x}\ \forall \mathbf{w}\ ((\forall \mathbf{y} \in \mathbf{fxw}\ \varphi_{\mathsf{dn}}(\mathbf{x};\mathbf{y})) \to \psi_{\mathsf{dn}}(\mathbf{gx};\mathbf{w}))$;

(v) $\mathbf{f}\ \mathsf{mr}\ \forall z\ \varphi :\equiv \forall z\ (\mathbf{f}z\ \mathsf{mr}\ \varphi)$;

(vi) $\mathbf{x}, z\ \mathsf{mr}\ \exists z\ \varphi :\equiv\ \mathbf{x}\ \mathsf{mr}\ \varphi(z)$.

Teorema 1.14. *(Teorema da Correcção)*

Seja φ *fórmula de* HA^ω *e* Γ *conjunto de fórmulas de* HA^ω *da forma* $\forall x\ \psi$*, onde* ψ *é fórmula livre de quantificadores.*

Se $\mathsf{HA}^\omega + AC + IP_\forall + M + \Gamma \vdash \varphi$*, então existem termos* $\mathbf{t}$ *tais que* $\mathsf{HA}^\omega + \Gamma \vdash \forall \mathbf{y}\ \varphi_{\mathsf{dn}}(\mathbf{t};\mathbf{y})$.

Teorema 1.15. *(Teorema da Caracterização)*

Para toda a fórmula φ *de* HA^ω*,*

$$\mathsf{HA}^\omega + AC + IP_\forall + M \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi^{\mathsf{dn}}.$$

A interpretação funcional de Diller–Nahm é uma variante da *Dialectica* que interpreta fórmulas da forma $\varphi \to (\varphi \wedge \varphi)$ de forma significativamente mais simples que esta última. Está ainda construída de tal modo que as fórmulas atómicas não desempenham nela um papel essencial; em particular não é necessário que as fórmulas atómicas sejam decidíveis. De facto – ver [33] –, em teoria, qualquer conjunto de fórmulas fechado para as operações e para quantificações universais limitadas que contenha as fórmulas atómicas pode substitui-las na definição da interpretação, obtendo-se ainda o mesmo teorema da correcção.

CAPÍTULO 2

Lógica Linear Intuicionista, ILL^ω

2.1 Os sistemas ILL^ω e $\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}$.

A Lógica Linear, apresentada pela primeira vez por Jean–Yves Girard no seu artigo *Linear Logic* ([17]), pode ser encarada como um *refinamento* das Lógicas Clássica e Intuicionista, tendo já sido descrita como "uma arrojada tentativa de reconciliar a beleza e simetria dos sistemas para a lógica clássica com a demanda por provas construtivas que havia conduzido à lógica intuicionista" ([5], tradução da autora). Tal refinamento vem acompanhado (e é talvez nesta característica que reside a sua força) de uma radical mudança de paradigma: neste novo contexto, o ênfase não está na *verdade* (como acontece no âmbito clássico), nem na existência de *provas (construtivas)* (como é o caso, no âmbito intuicionista), mas sim no papel das fórmulas como *recursos.* O significado desta afirmação tornar-se-á mais claro ao longo dos parágrafos seguintes.[1]

Consideremos, a título de exemplo, o comportamento clássico e intuicionista da implicação $\rightarrow$. Sabemos que, dadas quaisquer fórmulas φ e ψ, de φ e $\varphi \rightarrow \psi$ podemos concluir ψ – mas φ *ainda é verdadeira.* Ora, é fácil convencermo-nos de que em muitas situações reais o raciocínio acima não está correcto: ao "realizarmos" uma implicação estamos a modificar as condições (isto é, as premissas) e, portanto, não a podemos iterar. Um exemplo ilustrativo: considere o leitor uma máquina de venda automática em que o produto y que pretende adquirir tem um custo x. Numa tentativa de tornar esta afirmação rigorosa poderíamos sentir-nos tentados a expressá-la como

[1]Importa referir que, historicamente, a Lógica Linear foi formulada (a partir da interessante observação de Girard de que as propriedades constructivas da Lógica Intuicionista resultam da eliminação das regras estruturais de contracção e enfraquecimento num local específico do sequente, o que sugere que o caminho possa ser uma eliminação mais geral) e é só algum tempo mais tarde que surge uma sua *interpretação* – em [25] é demonstrado que a Lógica Linear pode ser explicada como uma lógica de recursos. Aqui, contudo, tendo em vista uma exposição clara e motivadora, apresentaremos a lógica em paralelo com uma sua possível motivação.

$$\textit{Quantia } x \to \textit{Produto } y,$$

no sentido em que a quantia x seria condição suficiente para obter y. Contudo, uma breve análise da fórmula acima é suficiente para concluirmos que não poderia de modo nenhum constituir uma representação fiel da realidade: pelo observado acima, *quantia* x e *quantia* $x \to$ *produto* y permite-nos obter *quantia* x e *produto* y – e, portanto, obter o produto sem qualquer custo!

O que sucede no exemplo anterior – ao qual retornaremos em breve – é o seguinte: após introduzirmos a quantia x, há uma *modificação das premissas* (afinal, perdemos x no processo), e assim não podemos repetir o processo. De modo a ter este tipo de situações em consideração, a Lógica Linear introduz um novo, diferente conceito de implicação – a implicação linear $\multimap$ –, em que a fórmula $\varphi \multimap \psi$ deve ser encarada como a possibilidade de *transformar* o recurso φ no recurso ψ – processo findo o qual, é claro, φ não estará mais disponível. Seria assim correcto representar uma formalização da situação anterior através da expressão

$$\textit{Quantia } x \multimap \textit{Produto } y.$$

A pergunta essencial que agora surge é então a seguinte: que alterações deverão ser introduzidas às lógica clássica e intuicionista, que modificações poderemos considerar, de modo a que possamos captar esta realidade demarcadamente distinta da realidade matemática, esta ideia de fórmulas como bens consumíveis? A resposta, como talvez fosse expectável, é algo radical: alterando, de alguma forma, os conectivos lógicos utilizados, à semelhança do que começámos por fazer com a implicação. Mas, citando Girard, "visto que não há esperança de modificar os conectivos clássicos ou intuicionistas existentes, a lógica linear introduz novos conectivos"[2].

Apresentamos de seguida os novos conectivos da lógica linear. Estes serão, naturalmente, regidos por regras adequadas, as quais exporemos adiante; antes, porém, e tendo em conta o facto de esta ser uma área ainda relativamente recente, procuraremos apresentar o significado *intuitivo* de cada um deles, empregando para tal o exemplo da máquina de venda automática, já referido anteriormente. Antes, porém, cabe-nos um esclarecimento. Dentro da Lógica Linear podemos considerar duas sub-divisões: a Lógica Linear Clássica e a Lógica Linear Intuicionsta. Em termos sintáticos, a diferença entre elas reside apenas em dois pontos: em primeiro lugar, o conjunto dos conectivos da lógica linear clássica contém estritamente o conjunto dos conectivos da lógica linear intuicionista; em segundo lugar, na sua formalização, que será aqui feita novamente através do cálculo de sequentes, a lógica linear intuicionista volta a permitir apenas uma fórmula no lado direito do sequente, ao passo que a clássica não tem restrições relativas a esse ponto. Considerando que é na lógica

[2][18], tradução da autora.

linear intuicionista que reside o foco do nosso interesse será esta a única versão da lógica linear que descreveremos e apresentaremos aqui; o leitor interessado poderá consultar [4], [17], [18] e [34].

Prossigamos então para a Lógica Linear Intuicionista, cujos conectivos são os seguintes:

$\otimes$ – conjunção multiplicativa. A conjunção multiplicativa representa ocurrências *simultâneas* de recursos, que estão à disposição do consumidor e serão utilizadas de acordo com as directivas deste. $\varphi \otimes \psi$ diz-nos que existem duas acções, ou recursos, à nossas disposição, e ambos serão concretizados. Se, na nossa já conhecida máquina de venda automática, nos decidirmos pelos produtos y e z, estaremos a adquirir $y \otimes z$.

& – conjunção aditiva. Este conectivo é utilizado para denotar ocorrências *alternativas* de recursos, onde a escolha do recurso é efectuada pelo consumidor. Isto é, duas acções estão disponíveis (tal como em $\otimes$), mas apenas uma será realizada, sendo que poderemos escolher qual. Imagine-se que tanto o produto y como o produto z representam uma despesa de x; seria adequado escrever que $x \multimap y \,\&\, z$, visto que ambas as possibilidades estão disponíveis por tal valor, e podemos seleccionar a pretendida; por outro lado, não se tem $x \multimap y \otimes z$, já que tal significaria que x seria suficiente para adquirir *ambos* os produtos.[3]

$\oplus$ – disjunção (aditiva). Esta disjunção representa também a existência de recursos alternativos; a fundamental diferença em relação a & reside no facto de, aqui, não ser o consumidor que decide qual a acção a ser tomada, qual o recurso a ser utilizado. Para ilustrar o comportamento deste conectivo, a nossa agora tão famigerada máquina de venda automática necessitará de um ligeiro aperfeiçoamento: a saber, permitir como opção uma espécie de função aleatória. Isto é, a quantia x permite adquirir tanto o produto y como o z (e apenas um deles), mas será a máquina a determinar qual.[4]

$\multimap$ – implicação linear, como referido anteriormente.

$\forall, \exists$ – quantificadores universal e existencial, respectivamente; sobre estes nada temos a acrescentar, tendo o seu significado habitual.

[3]O leitor notará que este conectivo apresenta características usualmente associadas à disjunção; não seria contudo correcto encará-lo como uma disjunção, visto que as fórmulas $\varphi \& \psi \multimap \varphi$ e $\varphi \& \psi \multimap \psi$ são ambas dedutíveis, como veremos adiante.

[4]O leitor atento terá notado uma aparente falta de simetria nos conectivos acima apresentados, uma vez que não mencionamos um conectivo para a disjunção multiplicativa. Com efeito, tal conectivo – $\parr$ – existe no contexto da Lógica Linear Clássica; mas não no contexto intuicionista, uma vez que a sua utilização se relaciona com a existência múltiplas fórmulas no consequente do sequente.

Ao procurarmos uma lógica que capte as ideias intuitivas discutidas anteriormente surgem, contudo, duas questões relevantes. Suponha-se o caso de um consumidor que, apesar de perder a quantia x para adquirir y, tem à sua disposição um (na prática) ilimitado número de x; nesta situação não faria sentido supôr mudadas as premissas da nossa implicação $Quantia\ x \to Produto\ y$. Isto é, pode dar-se o caso de nos encontrarmos numa situação em que podemos assumir a existência de recursos ilimitados, e portanto a lógica linear deverá conseguir lidar com tais situações. Para que tal suceda, acrescentamos o seguinte conectivo à nossa lista:

! – exponencial. ! exprime a *iterabilidade* de uma acção, a existência *ilimitada* de um recurso. No exemplo da máquina de venda automática, utilizar-se-ia este conectivo para exprimir que teríamos tantas vezes a quantia x quanto fosse necessário. Observamos que, usando ! e a implicação linear $\multimap$, conseguimos captar o significado da implicação habitual $\to$:

$$\varphi \to \psi \equiv (!\varphi \multimap \psi),$$

já que, uma vez que supomos existência ilimitada do recuros φ, continuamos a ter φ depois de aplicarmos a implicação linear.

A segunda questão e porventura mais profunda questão prende-se com as tão conhecidas regras, presentes tanto no contexto clássico como no intuicionista, de contracção e enfraquecimento.[5] Recordamos que estas regras podem escrever-se simbolicamente como:

$$\frac{\Gamma, \varphi, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \psi}\ (\text{cont}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \psi}\ (\text{enfraq})$$

É agora perfeitamente claro que as regras acima não estão de acordo com a nossa heurística para a lógica linear: se são necessárias duas vezes a quantia x para adquirir y, claramente não é verdade que x (uma só vez) seja suficiente! Por outro lado, o enfraquecimento representaria uma situação em que existiria uma quantidade *excessiva* de recursos. Ora, no contexto da lógica linear um sequente deve ser visto como um processo que permite transformar as fórmulas do antecedente nas do consequente, processo esse findo o qual deixamos de ter disponíveis os recursos do antecedente. Assumimos portanto que *todos os recursos do antecedente foram consumidos.* Claramente, esta ideia impossibilita a existência de uma regra (geral) de enfraquecimento: se necessitamos *exactamente* do(s) recurso(s) Γ para produzir ψ, não é verdade que $\Gamma, \varphi \vdash \psi$.

[5] Aqui mencionaremos apenas as regras de contracção e enfraquecimento referentes ao lado esquerdo do sequente, já que no contexto intuicionista existe apenas uma fórmula no lado direito.

Assim, a nossa motivação leva-nos necessariamente a não admitir contracção e enfraquecimento no contexto geral.

Isto, contudo, levanta um obstáculo. Naturalmente, estamos interessados em construir uma lógica que seja pelo menos tão forte quanto as já existentes (e, de preferência, mais até); a pergunta natural é, então: será possível *mergulhar* a lógica usual (especialmente a intuicionista, visto que pretendemos conseguir ainda características construtivas) na lógica linear? Sucede que, se a lógica linear consistisse somente no que descrevemos até agora, a resposta seria negativa[6]. Seria então desejável *recuperar*, de alguma forma que se ajustasse à nossa heurística, estas regras estruturais. Por outro lado, uma breve reflexão convencer-nos-á de que a contracção (em especial) e o enfraquecimento, *no contexto em que dispomos de recursos ilimitados*, não contrariam as ideias que a lógica linear procura captar: é claro que se Γ e *duas* quantidades ilimitadas do recurso φ provam ψ, então Γ e *uma* quantidade ilimitada do recurso φ ainda provam ψ. Assim, a existência do conectivo ! fornece-nos um contexto no qual é possível e razoável aplicar contracção e enfraquecimento. A formulação de ambas estas regras será feita ainda na presente secção.

Ao longo do presente texto consideraremos não somente a Lógica Linear Intuicionista (ILL) mas sim esta lógica sobre todos os tipos finitos, ILL^ω. Definimos, à semelhança do que foi feito no Capítulo 1 para a Lógica Intuicionista, o conjunto dos *tipos finitos* de ILL^ω, indutivamente, do seguinte modo:

1. i é um tipo finito;

2. Se σ, ρ são tipos finitos, então $\sigma \to \rho$ é também um tipo finito.

A linguagem de ILL^ω contém os seguintes elementos:

1. Para cada tipo σ, existe uma quantidade numerável de variáveis x^σ de tipo σ;

2. Constantes:

   2.1 Assumimos a existência de uma constante c^i, de tipo i. Esta cláusula existe para assegurar que, dado um tipo arbitrário de ILL^ω, existe sempre um termo fechado desse tipo;

   2.2 As projecções $\Pi^{\sigma\to\rho\to\sigma}$, axiomatizadas da seguinte forma: dada uma fórmula φ arbitrária,

   $$\varphi\,[(\Pi_{\sigma,\rho}\ x^\sigma y^\rho)/w] \multimap\!\circ\ \varphi[x^\sigma/w];$$

   2.3 Os combinadores $\Sigma^{(\sigma\to\rho\to\tau)\to(\sigma\to\rho)\to\sigma\to\tau}$, axiomatizados do seguinte modo: se φ é fórmula de ILL^ω, então

[6] A este propósito, veja-se [17], p. 5.

$$\varphi\left[(\Sigma_{\sigma,\rho,\tau}xyz)/w\right] \multimap\!\circ\ \varphi[(xz(yz))\,/w],$$

com $x^{\sigma\to(\rho\to\tau)}, y^{\sigma\to\rho}$ e z^σ.

3. Os símbolos lógicos $\otimes, \&, \oplus, \multimap, !$, os quantificadores $\forall$ e $\exists$, e o símbolo 0 (que representa o absurdo).

O conjunto dos termos da linguagem é construído, como habitualmente, do seguinte modo:

1. As variáveis de ILL^ω são termos;

2. As constantes de ILL^ω são termos;

3. Se $t^{\sigma\to\rho}$ é termo de tipo $\sigma\to\rho$ e s^σ é termo de tipo σ, a aplicação $(t^{\sigma\to\rho}s^\sigma)^\rho$ é um termo de tipo ρ.

4. De novo de modo análogo ao que sucede na Lógica Intuicionista, pode definir-se, à custa das projecções e dos combinadores, a λ–abstracção: dados uma variável x^σ de tipo σ e um termo t^ρ de tipo ρ, a λ–abstracção $(\lambda x^\sigma.t^\rho)^{\sigma\to\rho}$ é um termo de tipo $\sigma\to\rho$.

Note-se que, neste contexto – tal como no contexto de IL^ω – optámos por um *tratamento neutro* da igualdade (como indicado pelos axiomas para as projecções e combinadores).

Se φ é fórmula atómica, denotamo-la por vezes por φ_{at}. Se φ e ψ são fórmulas, temos que $\varphi\otimes\psi, \varphi\ \&\ \psi, \varphi\oplus\psi, \varphi\multimap\psi, !\varphi, \forall x\ \varphi(x)$ e $\exists x\ \varphi(x)$ ainda são fórmulas.

Apresentamos agora os axiomas e regras de ILL^ω.

- Identidade: $\varphi\vdash\varphi$

- *Ex falso quodlibet*: $\Gamma, 0\vdash\varphi$

- Enfraquecimento: $\dfrac{\Gamma\vdash\psi}{\Gamma, !\varphi\vdash\psi}$ (enfraq)

- Contracção: $\dfrac{\Gamma, !\varphi, !\varphi\vdash\psi}{\Gamma, !\varphi\vdash\psi}$ (cont)

- Permutação: $\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi, \Delta\vdash\theta}{\Gamma, \psi, \varphi, \Delta\vdash\theta}$ (perm)

- Corte: $\dfrac{\Gamma\vdash\varphi \qquad \Delta, \varphi\vdash\psi}{\Gamma, \Delta\vdash\psi}$ (corte)

- Regras para $\otimes$: $\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \theta}{\Gamma, \varphi \otimes \psi \vdash \theta}\ (\otimes L)$ $\qquad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Delta \vdash \psi}{\Gamma, \Delta \vdash \varphi \otimes \psi}\ (\otimes R)$

- Regras para &: $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \;\&\; \theta \vdash \psi}\ (\& L)$ $\qquad \dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \theta \;\&\; \varphi \vdash \psi}\ (\& L)$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \;\&\; \psi}\ (\& R)$$

- Regras para $\oplus$: $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \theta \qquad \Gamma, \psi \vdash \theta}{\Gamma, \varphi \oplus \psi \vdash \theta}\ (\oplus L)$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \oplus \psi}\ (\oplus R) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \oplus \psi}\ (\oplus R)$$

- Regras para $\multimap$: $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Delta, \psi \vdash \theta}{\Gamma, \Delta, \varphi \multimap \psi \vdash \theta}\ (\multimap L)$ $\qquad \dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \multimap \psi}\ (\multimap R)$

- Regras para !: $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, !\varphi \vdash \psi}\ (!L)$ $\qquad \dfrac{!\Gamma \vdash \varphi}{!\Gamma \vdash !\varphi}\ (!R)$

- Regras para $\forall$: $\dfrac{\Gamma, \varphi[t^\sigma/x] \vdash \psi}{\Gamma, \forall x^\sigma \varphi \vdash \psi}\ (\forall L)$ $\qquad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \forall x^\sigma \varphi}\ (\forall R)$

- Regras para $\exists$: $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \exists x^\sigma \varphi \vdash \psi}\ (\exists L)$ $\qquad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi[t^\sigma/x]}{\Gamma \vdash \exists x^\sigma \varphi}\ (\exists R)$

Foi usada acima a seguinte (e intuitiva) notação: se $\Gamma = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ é uma sequência finita de fórmulas, $!\Gamma$ abrevia a sequência $(!\varphi_1, \ldots, !\varphi_n)$. Abreviamos por $\varphi \multimapboth \psi$ a fórmula $(\varphi \multimap \psi) \;\&\; (\psi \multimap \varphi)$. Observamos que para se demonstrar a equivalência linear $\multimapboth$ basta – como aliás estaríamos à espera – demonstrar as implicações directa e recíproca, já que:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \multimap \psi \qquad \Gamma \vdash \psi \multimap \varphi}{\Gamma \vdash (\varphi \multimap \psi) \;\&\; (\psi \multimap \varphi)}\ (\& R)}{\Gamma \vdash \varphi \multimapboth \psi}\ (\text{por definição})$$

No presente texto teremos ainda interesse num subsistema de ILL^ω, que denotaremos $\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}$, obtido do primeiro restringindo a regra $\&R$: em $\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}$ o contexto Γ desta regra é constituído por fórmulas da forma $!\varphi$. Denotaremos esta forma restrita da regra &R por $\&\mathrm{R_r}$.

2.2 Imersão de IL^ω em ILL^ω

No que se segue, apresentaremos duas traduções – de IL^ω para ILL^ω – que são efectivamente imersões da primeira na segunda, e que terão interesse mais tarde.

Definição 2.1. [Girard, [17]]
Definimos duas traduções $(\cdot)^*$ e $(\cdot)^\circ$ de fórmulas de IL^ω para fórmulas de $\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}$, indutivamente, do seguinte modo:

$\varphi_{\mathsf{at}}^* :\equiv \varphi_{\mathsf{at}},\ \text{ se } \varphi_{\mathsf{at}} \not\equiv \bot$	$\varphi_{\mathsf{at}}^\circ :\equiv !\varphi_{\mathsf{at}},\ \text{ se } \varphi_{\mathsf{at}} \not\equiv \bot$
$\bot^* :\equiv 0$	$\bot^\circ :\equiv 0$
$(\varphi \wedge \psi)^* :\equiv \varphi^* \ \&\ \psi^*$	$(\varphi \wedge \psi)^\circ :\equiv \varphi^\circ \otimes \psi^\circ$
$(\varphi \vee \psi)^* :\equiv\ !\varphi^* \oplus !\psi^*$	$(\varphi \vee \psi)^\circ :\equiv \varphi^\circ \oplus \psi^\circ$
$(\varphi \to \psi)^* :\equiv\ !\varphi^* \multimap \psi^*$	$(\varphi \to \psi)^\circ :\equiv\ !(\varphi^\circ \multimap \psi^\circ)$
$(\forall x\ \varphi)^* :\equiv \forall x\ \varphi^*$	$(\forall x\ \varphi)^\circ :\equiv\ !(\forall x\ \varphi^\circ)$
$(\exists x\ \varphi)^* :\equiv \exists x\ !\varphi^*$	$(\exists x\ \varphi)^\circ :\equiv \exists x\ \varphi^\circ$

O seguinte lema, algo técnico, ser-nos-á útil.

Lema 2.2. *Sejam φ, ψ fórmulas de ILL^ω. As seguintes afirmações são demonstráveis em $\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}$:*

1. $0 \multimapboth !0$;
2. $!\varphi \otimes !\psi \multimapboth !(\varphi \ \&\ \psi)$;
3. $!\varphi \oplus !\psi \multimapboth\ !(!\varphi \oplus !\psi)$;
4. $!(!\varphi \multimap !\psi) \multimapboth\ !(!\varphi \multimap \psi)$;
5. $!(\forall x\ !\varphi) \multimapboth\ !(\forall x\ \varphi)$;
6. $!(\exists x\ !\varphi) \multimapboth \exists x\ !\varphi$;
7. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \multimap \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \psi}$
8. $\varphi \ \&\ \psi \multimap \varphi$ *e* $\varphi \ \&\ \psi \multimap \psi$.

Demonstração.

1.

($\multimap$):

$$\begin{prooftree}\AxiomC{$0 \vdash !0$}\RightLabel{($\multimap$R)}\UnaryInfC{$\vdash 0 \multimap !0$}\end{prooftree}$$

($\multimapinv$):

$$\begin{prooftree}\AxiomC{$0 \vdash 0$}\RightLabel{(!L)}\UnaryInfC{$!0 \vdash 0$}\RightLabel{($\multimap$R)}\UnaryInfC{$\vdash !0 \multimap 0$}\end{prooftree}$$

2.

($\multimap$):

$$\begin{prooftree}\AxiomC{$\varphi \vdash \varphi$}\RightLabel{(!L)}\UnaryInfC{$!\varphi \vdash \varphi$}\RightLabel{(enfraq)}\UnaryInfC{$!\varphi, !\psi \vdash \varphi$}\AxiomC{$\psi \vdash \psi$}\RightLabel{(!L)}\UnaryInfC{$!\psi \vdash \psi$}\RightLabel{(enfraq, perm)}\UnaryInfC{$!\varphi, !\psi \vdash \psi$}\RightLabel{(\&R$_\mathrm{r}$)}\BinaryInfC{$!\varphi, !\psi \vdash \varphi \,\&\, \psi$}\RightLabel{(!R)}\UnaryInfC{$!\varphi, !\psi \vdash !(\varphi \,\&\, \psi)$}\RightLabel{($\otimes$L)}\UnaryInfC{$!\varphi \otimes !\psi \vdash !(\varphi \,\&\, \psi)$}\end{prooftree}$$

($\multimapinv$):

$$\begin{prooftree}\AxiomC{$\varphi \vdash \varphi$}\RightLabel{(\&L)}\UnaryInfC{$\varphi \,\&\, \psi \vdash \varphi$}\RightLabel{(!L)}\UnaryInfC{$!(\varphi \,\&\, \psi) \vdash \varphi$}\RightLabel{(!R)}\UnaryInfC{$!(\varphi \,\&\, \psi) \vdash !\varphi$}\AxiomC{$\psi \vdash \psi$}\RightLabel{(\&L)}\UnaryInfC{$\varphi \,\&\, \psi \vdash \psi$}\RightLabel{(!L)}\UnaryInfC{$!(\varphi \,\&\, \psi) \vdash \psi$}\RightLabel{(!R)}\UnaryInfC{$!(\varphi \,\&\, \psi) \vdash !\psi$}\RightLabel{($\otimes$R)}\BinaryInfC{$!(\varphi \,\&\, \psi), !(\varphi \,\&\, \psi) \vdash !\varphi \otimes !\psi$}\RightLabel{(cont)}\UnaryInfC{$!(\varphi \,\&\, \psi) \vdash !\varphi \otimes !\psi$}\end{prooftree}$$

3.

($\multimap$):

$$\begin{prooftree}\AxiomC{$!\varphi \vdash !\varphi$}\RightLabel{($\oplus$R)}\UnaryInfC{$!\varphi \vdash !\varphi \oplus !\psi$}\RightLabel{(!R)}\UnaryInfC{$!\varphi \vdash !(!\varphi \oplus !\psi)$}\AxiomC{$!\psi \vdash !\psi$}\RightLabel{($\oplus$R)}\UnaryInfC{$!\psi \vdash !\varphi \oplus !\psi$}\RightLabel{(!R)}\UnaryInfC{$!\psi \vdash !(!\varphi \oplus !\psi)$}\RightLabel{($\oplus$L)}\BinaryInfC{$!\varphi \oplus !\psi \vdash !(!\varphi \oplus !\psi)$}\end{prooftree}$$

($\multimapinv$):

$$\begin{prooftree}\AxiomC{$!\varphi \oplus !\psi \vdash !\varphi \oplus !\psi$}\RightLabel{(!R)}\UnaryInfC{$!(!\varphi \oplus !\psi) \vdash !\varphi \oplus !\psi$}\end{prooftree}$$

4.

($\multimap$):

$$\begin{prooftree}\AxiomC{$!\varphi \vdash !\varphi$}\AxiomC{$\psi \vdash \psi$}\RightLabel{(!L)}\UnaryInfC{$!\psi \vdash \psi$}\RightLabel{($\multimap$L)}\BinaryInfC{$!\varphi, !\varphi \multimap !\psi \vdash \psi$}\RightLabel{(perm)}\UnaryInfC{$!\varphi \multimap !\psi, !\varphi \vdash \psi$}\RightLabel{($\multimap$R)}\UnaryInfC{$!\varphi \multimap !\psi \vdash !\varphi \multimap \psi$}\RightLabel{(!L)}\UnaryInfC{$!(!\varphi \multimap !\psi) \vdash !\varphi \multimap \psi$}\RightLabel{(!R)}\UnaryInfC{$!(!\varphi \multimap !\psi) \vdash !(!\varphi \multimap \psi)$}\end{prooftree}$$

($\multimapinv$):

$$\begin{prooftree}\AxiomC{$!\varphi \vdash !\varphi$}\AxiomC{$\psi \vdash \psi$}\RightLabel{($\multimap$L)}\BinaryInfC{$!\varphi, !\varphi \multimap \psi \vdash \psi$}\RightLabel{(!L)}\UnaryInfC{$!\varphi, !(!\varphi \multimap \psi) \vdash \psi$}\RightLabel{(!R)}\UnaryInfC{$!\varphi, !(!\varphi \multimap \psi) \vdash !\psi$}\RightLabel{(perm)}\UnaryInfC{$!(!\varphi \multimap \psi), !\varphi \vdash !\psi$}\RightLabel{($\multimap$R)}\UnaryInfC{$!(!\varphi \multimap \psi) \vdash !\varphi \multimap !\psi$}\RightLabel{(!R)}\UnaryInfC{$!(!\varphi \multimap \psi) \vdash !(!\varphi \multimap !\psi)$}\end{prooftree}$$

5.

$(\multimap)$:

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$\varphi \vdash \varphi$}
\RightLabel{(!L)}
\UnaryInfC{$!\varphi \vdash \varphi$}
\RightLabel{($\forall$L)}
\UnaryInfC{$\forall x \ !\varphi \vdash \varphi$}
\RightLabel{($\forall$R)}
\UnaryInfC{$\forall x \ !\varphi \vdash \forall x \ \varphi$}
\RightLabel{(!L)}
\UnaryInfC{$!(\forall x \ !\varphi) \vdash \forall x \ \varphi$}
\RightLabel{(!R)}
\UnaryInfC{$!(\forall x \ !\varphi) \vdash !(\forall x \ \varphi)$}
\end{prooftree}$$

$(\multimapinv)$:

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$\varphi \vdash \varphi$}
\RightLabel{($\forall$L)}
\UnaryInfC{$\forall x \ \varphi \vdash \varphi$}
\RightLabel{(!L)}
\UnaryInfC{$!(\forall x \ \varphi) \vdash \varphi$}
\RightLabel{(!R)}
\UnaryInfC{$!(\forall x \ \varphi) \vdash !\varphi$}
\RightLabel{($\forall$R)}
\UnaryInfC{$!(\forall x \ \varphi) \vdash \forall x \ !\varphi$}
\RightLabel{(!R)}
\UnaryInfC{$!(\forall x \ \varphi) \vdash !(\forall x \ !\varphi)$}
\end{prooftree}$$

6.

$(\multimap)$:

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$\exists x \ !\varphi \vdash \exists x \ !\varphi$}
\RightLabel{(!L)}
\UnaryInfC{$!(\exists x \ !\varphi) \vdash \exists x \ !\varphi$}
\end{prooftree}$$

$(\multimapinv)$:

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$!\varphi \vdash !\varphi$}
\RightLabel{($\exists$R)}
\UnaryInfC{$!\varphi \vdash \exists x \ !\varphi$}
\RightLabel{(!R)}
\UnaryInfC{$!\varphi \vdash !(\exists x \ !\varphi)$}
\RightLabel{($\exists$L)}
\UnaryInfC{$\exists x \ !\varphi \vdash !(\exists x \ !\varphi)$}
\end{prooftree}$$

7.

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma \vdash \varphi \multimap \psi$}
\AxiomC{$\varphi \vdash \varphi$}
\AxiomC{$\psi \vdash \psi$}
\RightLabel{($\multimap$L)}
\BinaryInfC{$\varphi, \varphi \multimap \psi \vdash \psi$}
\RightLabel{(corte)}
\BinaryInfC{$\Gamma, \varphi \vdash \psi$}
\end{prooftree}$$

Note-se que a implicação linear recíproca corresponde simplesmente à regra $\multimap$R (e, portanto, tem-se a equivalência linear).

8.

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$\varphi \vdash \varphi$}
\RightLabel{(\&L)}
\UnaryInfC{$\varphi \ \& \ \psi \vdash \varphi$}
\RightLabel{($\multimap$R)}
\UnaryInfC{$\vdash \ \varphi \& \ \psi \multimap \varphi$}
\end{prooftree}$$

A segunda afirmação de 8. prova-se de modo dual.

$\square$

Proposição 2.3. *Seja* φ *uma fórmula de* IL^{ω}. *Se* φ *é demonstrável em* IL^{ω}, *então* φ^* *e* φ° *são demonstráveis em* $\mathsf{ILL}^{\omega}_{\mathsf{r}}$ *(e, portanto, também em* ILL^{ω}*). Mais, tem-se que* $\varphi^{\circ} \multimapboth \, !\varphi^*$.

Demonstração. Comecemos por demonstrar, por indução na complexidade de φ, que

$$\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r} \vdash \varphi^\circ \multimap\!\!\circ\ !\varphi^*.$$

Se φ é fórmula atómica diferente de $\perp$, nada há a demonstrar; $!\varphi^* \equiv\ !\varphi \equiv \varphi^\circ$. O caso $\perp$ corresponde à alínea 1. do Lema 2.2: $!\perp^* \equiv\ !0 \multimap\!\!\circ\ 0 :\equiv \perp^\circ$.

Para fórmulas da forma $\varphi \wedge \psi$, tem-se:

$$\begin{array}{lll} !(\varphi \wedge \psi)^* & \equiv\ !(\varphi^* \ \&\ \psi^*) & \text{(por definição de } (\cdot)^*) \\ & \multimap\!\!\circ\ !\varphi^* \otimes\ !\psi^* & \text{(pela alínea 2. do Lema 2.2)} \\ & \multimap\!\!\circ\ \varphi^\circ \otimes \psi^\circ & \text{(por hipótese de indução)} \\ & \equiv\ (\varphi \wedge \psi)^\circ & \text{(por definição de } (\cdot)^\circ). \end{array}$$

Para fórmulas da forma $\varphi \vee \psi$:

$$\begin{array}{lll} !(\varphi \vee \psi)^* & \equiv\ !(!\varphi^* \oplus\ !\psi^*) & \text{(por definição de } (\cdot)^*) \\ & \multimap\!\!\circ\ !\varphi^* \oplus\ !\psi^* & \text{(pela alínea 3. do Lema 2.2)} \\ & \multimap\!\!\circ\ \varphi^\circ \oplus \psi^\circ & \text{(por hipótese de indução} \\ & \equiv (\varphi \vee \psi)^\circ & \text{(por definição de } (\cdot)^\circ). \end{array}$$

No caso $\varphi \to \psi$:

$$\begin{array}{lll} !(\varphi \to \psi)^* & \equiv\ !(!\varphi^* \multimap \psi^*) & \text{(por definição de } (\cdot)^*) \\ & \multimap\!\!\circ\ !(!\varphi^* \multimap\ !\psi^*) & \text{(pela alínea 4. do Lema 2.2)} \\ & \multimap\!\!\circ\ !(\varphi^\circ \multimap \psi^\circ) & \text{(por hipótese de indução)} \\ & \equiv\ (\varphi \to \psi)^\circ & \text{(por definição de } (\cdot)^\circ). \end{array}$$

Vejamos, por último, o caso dos quantificadores:

$$\begin{array}{lll} !(\forall x\ \varphi)^* & \equiv\ !(\forall x\ \varphi^*) & \text{(por definição de } (\cdot)^*) \\ & \multimap\!\!\circ\ !(\forall x\ !\varphi^*) & \text{(pela alínea 5. do Lema 2.2)} \\ & \multimap\!\!\circ\ !(\forall x\ \varphi^\circ) & \text{(por hipótese de indução)} \\ & \equiv\ (\forall x\ \varphi)^\circ & \text{(por definição de } (\cdot)^\circ)\text{; e} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} !(\exists x\ \varphi)^* & \equiv\ !(\exists x\ !\varphi^*) & \text{(por definição de } (\cdot)^*) \\ & \multimap\!\!\circ\ \exists x\ !\varphi^* & \text{(pela alínea 6. do Lema 2.2)} \\ & \multimap\!\!\circ\ \exists x\ \varphi^\circ & \text{(por hipótese de indução)} \\ & \equiv\ (\exists x\ \varphi)^\circ & \text{(por definição de } (\cdot)^\circ). \end{array}$$

Provemos agora que, dada φ fórmula de IL^ω se φ é dedutível em IL^ω, então φ^* é dedutível em $\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}$. A demonstração far-se-á por indução no comprimento da dedução; por conveniência, apresentaremos à esquerda os axiomas e regras de IL^ω e à direita a dedução, em $\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}$, da respectiva tradução.

- IL^ω: $\varphi \vdash \varphi$ $\dashrightarrow$ $\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}$: $\dfrac{\varphi^* \vdash \varphi^*}{!\varphi^* \vdash \varphi^*}\ (!\mathrm{L})$

- IL^ω: $\dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \psi}$ $\dashrightarrow$ $\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}$: $\dfrac{!\Gamma^* \vdash \psi^*}{!\Gamma^*, !\varphi^* \vdash \psi^*}\ (\mathrm{enfraq})$

- IL^ω: $\dfrac{\Gamma, \varphi, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \psi}$ $\dashrightarrow$ $\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}$: $\dfrac{!\Gamma^*, !\varphi^*, !\varphi^* \vdash \psi^*}{!\Gamma^*, !\varphi^* \vdash \psi^*}\ (\mathrm{cont})$

- IL^ω: $\dfrac{\Gamma, \varphi\, \psi, \Delta \vdash \theta}{\Gamma, \psi, \varphi, \Delta \vdash \theta}$ $\dashrightarrow$ $\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}$: $\dfrac{!\Gamma^*, !\varphi^*, !\psi^*, !\Delta^* \vdash \theta^*}{!\Gamma^*, !\psi^*, !\varphi^*, !\Delta^* \vdash \theta^*}\ (\mathrm{perm})$

- IL^ω: $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Delta, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \Delta \vdash \psi}$

$$\Big\downarrow$$

$\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}$:
$$\dfrac{\dfrac{!\Gamma^* \vdash \varphi^*}{!\Gamma^* \vdash !\varphi^*}\ (!\mathrm{R}) \qquad !\Delta^*, !\varphi^* \vdash \psi^*}{!\Gamma^*, !\Delta^* \vdash \psi^*}\ (\mathrm{corte})$$

- IL^ω: $\bot \vdash \varphi$ $\dashrightarrow$ $\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}$: $\dfrac{\dfrac{0 \vdash \varphi^*}{!0 \vdash \varphi^*}\ (!\mathrm{L})}{!\bot^* \vdash \varphi^*}\ (\text{por definição de } (\cdot)^*)$

- IL^ω: $\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \theta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \theta}$

$$\Big\downarrow$$

$\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}$:
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(\text{Lema 2.2.2})}{\vdash\ !\varphi^* \otimes\ !\psi^* \multimapboth\ !(\varphi^* \& \psi^*)}}{\vdash (!\varphi^* \otimes\ !\psi^* \multimap\ !(\varphi^* \& \psi^*))\ \&\ (!(\varphi^* \& \psi^*) \multimap\ !\varphi^* \otimes\ !\psi^*)}}{\vdash\ !(\varphi^* \& \psi^*) \multimap\ !\varphi^* \otimes\ !\psi^*}\ (\text{Lema 2.2.8})}{!(\varphi^* \& \psi^*) \vdash\ !\varphi^* \otimes\ !\psi^*}\ (\text{Lema 2.2.7}) \qquad \dfrac{\overset{(\text{H. I.})}{!\Gamma^*, !\varphi^*, !\psi^* \vdash \theta^*}}{!\Gamma^*, !\varphi^* \otimes\ !\psi^* \vdash \theta^*}\ (\otimes\mathrm{L})}{\dfrac{!\Gamma^*, !(\varphi^* \& \psi^*) \vdash \theta^*}{!\Gamma^*, !(\varphi \wedge \psi)^* \vdash \theta^*}}\ (\mathrm{corte})$$

- IL^ω: $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Delta \vdash \psi}{\Gamma, \Delta \vdash \varphi \wedge \psi}$

$$\Big\downarrow$$

$$\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}: \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{!\Gamma^* \vdash \varphi^*}{!\Gamma^*, !\Delta^* \vdash \varphi^*}\,(\text{enfraq}) \qquad \dfrac{!\Delta^* \vdash \psi^*}{!\Gamma^*, !\Delta^* \vdash \psi^*}\,(\text{enfraq, perm})}{!\Gamma^*, !\Delta^* \vdash \varphi^* \& \psi^*}\,(\&\mathsf{R_r})}{!\Gamma^*, !\Delta^* \vdash (\varphi \wedge \psi)^*}$$

- IL^ω: $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \theta \qquad \Delta, \psi \vdash \theta}{\Gamma, \Delta, \varphi \vee \psi \vdash \theta}$

$$\Big\downarrow$$

$$\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}: \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{!\Gamma^*, !\varphi^* \vdash \theta^*}{!\Gamma^*, !\Delta^*, !\varphi^* \vdash \theta^*}\,(\text{enfraq, perm}) \qquad \dfrac{!\Delta^*, !\psi^* \vdash \theta^*}{!\Gamma^*, !\Delta^*, !\psi^* \vdash \theta^*}\,(\text{enfraq, perm})}{!\Gamma^*, !\Delta^*, !\varphi^* \oplus\, !\psi^* \vdash \theta^*}\,(\oplus\text{L})}{!\Gamma^*, !\Delta^*, !(!\varphi^* \oplus\, !\psi^*) \vdash \theta^*}\,(\text{Lema 2.2.3})}{!\Gamma^*, !\Delta^*, !(\varphi \vee \psi)^* \vdash \theta^*}$$

- IL^ω: $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}$ $\dashrightarrow$ $\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}$: $\dfrac{\dfrac{\dfrac{!\Gamma^* \vdash \varphi^*}{!\Gamma^* \vdash\, !\varphi^*}\,(!\text{R})}{!\Gamma^* \vdash\, !\varphi^* \oplus\, !\psi^*}\,(\oplus\text{R})}{!\Gamma^* \vdash (\varphi \vee \psi)^*}$

A regra dual para $\vee$ prova-se de forma análoga.

- IL^ω: $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Delta, \psi \vdash \theta}{\Gamma, \Delta, \varphi \to \psi \vdash \theta}$

$$\Big\downarrow$$

$$\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}: \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{!\Gamma^* \vdash \varphi^*}{!\Gamma^* \vdash\, !\varphi^*}\,(!\text{R}) \qquad !\Delta^*, !\psi^* \vdash \theta^*}{!\Gamma^*, !\Delta^*, !\varphi^* \multimap\, !\psi^* \vdash \theta^*}\,(\multimap\text{L})}{!\Gamma^*, !\Delta^*, !(!\varphi^* \multimap\, !\psi^*) \vdash \theta^*}\,(!\text{L})}{!\Gamma^*, !\Delta^*, !(!\varphi^* \multimap \psi^*) \vdash \theta^*}\,(\text{Lema 2.2.4})}{!\Gamma^*, !\Delta^*, !(\varphi \to \psi)^* \vdash \theta^*}$$

- IL^ω: $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}$ $\dashrightarrow$ $\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}$: $\dfrac{\dfrac{!\Gamma^*, !\varphi^* \vdash \psi^*}{!\Gamma^* \vdash !\varphi^* \multimap \psi^*}\,(\multimap\mathrm{R})}{!\Gamma^* \vdash (\varphi \to \psi)^*}$

- IL^ω: $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \forall x\ \varphi \vdash \psi}$ $\dashrightarrow$ $\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}$: $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{!\Gamma^*, !\varphi^* \vdash \psi^*}{!\Gamma^*, \forall x\ !\varphi^* \vdash \psi^*}\,(\forall\mathrm{L})}{!\Gamma^*, !(\forall x\ !\varphi^*) \vdash \psi^*}\,(!\mathrm{L})}{!\Gamma^*, !(\forall x\ \varphi^*) \vdash \psi^*}\,(\text{Lema 2.2.5})}{!\Gamma^*, !(\forall x\ \varphi)^* \vdash \psi^*}$

- IL^ω: $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi[a]}{\Gamma \vdash \forall x\ \varphi(x)}$ $\dashrightarrow$ $\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}$: $\dfrac{\dfrac{!\Gamma^* \vdash \varphi^*[a]}{!\Gamma^* \vdash \forall x\ \varphi^*}\,(\forall\mathrm{R})}{!\Gamma^* \vdash (\forall x\ \varphi)^*}$

- IL^ω: $\dfrac{\Gamma, \varphi[a] \vdash \psi}{\Gamma, \exists x\ \varphi(x) \vdash \psi}$ $\dashrightarrow$ $\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}$: $\dfrac{\dfrac{\dfrac{!\Gamma^*, !\varphi^*[a] \vdash \psi^*}{!\Gamma^*, \exists x\ !\varphi^* \vdash \psi^*}\,(\exists\mathrm{L})}{!\Gamma^*, !(\exists x\ !\varphi^*) \vdash \psi^*}\,(!\mathrm{L})}{!\Gamma^*, !(\exists x\ \varphi)^* \vdash \psi^*}$

- IL^ω: $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \exists x\ \varphi}$ $\dashrightarrow$ $\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}$: $\dfrac{\dfrac{\dfrac{!\Gamma^* \vdash \varphi^*}{!\Gamma^* \vdash !\varphi^*}\,(!\mathrm{R})}{!\Gamma^* \vdash \exists x\ !\varphi^*}\,(\exists\mathrm{R})}{!\Gamma^* \vdash (\exists x\ \varphi)^*}$

Vejamos que os dois resultados anteriores – a saber, que dada φ fórmula de IL^ω, $!\varphi^* \multimapboth \varphi^\circ$, e também que, se $\mathsf{IL}^\omega \vdash \varphi$, então $\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r} \vdash \varphi^*$ – nos permitem concluir a verdade deste último no que diz respeito à tradução $(\cdot)^\circ$. Suponhamos então que φ é fórmula dedutível em IL^ω; vem que φ^* é dedutível em $\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}$. Tem-se então:

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \varphi^*}{\vdash\ !\varphi^*}\,(!\mathrm{R}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash !\varphi^* \multimapboth \varphi^\circ}{\vdash (!\varphi^* \multimap \varphi^\circ)\ \&\ (\varphi^\circ \multimap !\varphi^*)}\,(\text{por definição})}{\vdash\ !\varphi^* \multimap \varphi^\circ}\,(\text{Lema 2.2.8})}{!\varphi^* \vdash \varphi^\circ}\,(\text{Lema 2.2.7})}{\vdash \varphi^\circ}\,(\text{corte})$$

Isto conclui a demonstração.

□

2.3 O sistema ILL_b^ω.

Definição 2.4. (O Sistema ILL_b^ω.)

O sistema ILL_b^ω obtém-se de ILL^ω acrescentando à linguagem subjacente ao último o tipo básico *booleano*, que denotaremos por b. Assumimos a existência de duas constantes boolenas, verdadeiro e falso – T e F, respectivamente –, e de uma relação de igualdade $=^b$ entre termos de tipo booleano. Supomos além disso a existência, para cada tipo σ, de uma constante de tipo $b \to \sigma \to \sigma \to \sigma$; esta deve ser encarada como um λ–termo condicional, $Con(z, s, t)$, que abreviaremos por $z(s, t)$ e que corresponde a s, se $z^b =^b \mathrm{T}$, e a t, se $z^b =^b \mathrm{F}$.

ILL_b^ω tem os seguintes axiomas para a igualdade $=^b$:

1. $!(x =^b x)$;
2. $!(x =^b y) \multimap !(y =^b x)$;
3. $!(x =^b y) \otimes !(y =^b z) \multimap !(x =^b z)$;
4. $!(x =^b y) \otimes \varphi[x/w] \multimap \varphi[y/w]$.

   Queremos também garantir que T e F são constantes distintas, e que são os únicos termos de tipo booleano. Acrescentamos assim os seguintes axiomas:

5. $!(T =^b \mathrm{F}) \multimap 0$;
6. $!(z =^b \mathrm{T}) \oplus !(z =^b \mathrm{F})$.

   Finalmente, precisamos de axiomas que traduzam a ideia intuitiva por detrás do λ–termo que referimos acima:

7. $\varphi[\mathrm{T}(s, t)/w] \multimap\!\!\circ\; \varphi[s/w]$, e $\varphi[\mathrm{F}(s, t)/w] \multimap\!\!\circ\; \varphi[t/w]$.

Usamos, por simplicidade, a seguinte abreviatura:

$$\varphi \diamond_z \psi :\equiv (!(z =^b \mathrm{T}) \multimap \varphi) \;\&\; (!(z =^b \mathrm{F}) \multimap \psi).$$

Frequentemente, e visto que, atendendo ao nosso já referido tratamento neutral da igualdade, não há ambiguidade, escreveremos apenas = (em vez de $=^b$) para designar a igualdade entre termos de tipo booleano.

Utilizaremos também, sistematicamente, z como variável booleana.

Lema 2.5. *Sejam φ e ψ fórmulas da linguagem da lógica linear intuicionista. As seguintes afirmações são demonstráveis em ILL_b^ω:*

1. $\dfrac{\vdash \varphi[\mathrm{T}] \qquad \vdash \varphi[\mathrm{F}]}{\vdash \varphi[z]}$

2. $!(\mathrm{T} =^b \mathrm{T}) \multimap \varphi \vdash \varphi$ *e* $!(\mathrm{F} =^b \mathrm{F}) \multimap \varphi \vdash \varphi$

3. $\varphi \vdash\ !(\mathrm{T} =^b \mathrm{F}) \multimap \psi$

4. $\varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi \multimapboth \varphi$, *e* $\varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi \multimapboth \psi$

5. $!\varphi \diamond_z\ !\psi \multimapboth\ !(!\varphi \diamond_z\ !\psi)$.

Demonstração.

1.

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash \varphi[T]}\ (\text{por hipótese}) \qquad \dfrac{\dfrac{!(z =^b \mathrm{T}) \vdash\ !(z =^b \mathrm{T}) \qquad \varphi[\mathrm{T}] \vdash \varphi[\mathrm{T}]}{!(z =^b \mathrm{T}),\ \varphi[\mathrm{T}] \vdash\ !(z =^b \mathrm{T}) \otimes \varphi[\mathrm{T}]}\ (\otimes\mathrm{R}) \qquad \dfrac{}{!(z =^b \mathrm{T}) \otimes \varphi[\mathrm{T}] \vdash \varphi[z]}\ (\text{Axioma 4})}{!(z =^b \mathrm{T}),\ \varphi[\mathrm{T}] \vdash \varphi[z]}\ (\text{corte})}{!(z =^b \mathrm{T}) \vdash \varphi[z]}\ (\text{corte})$$

Referiremos a dedução acima como (1). Analogamente,

$$\dfrac{\vdash \varphi[F] \qquad \dfrac{\dfrac{!(z =^b \mathrm{F}) \vdash\ !(z =^b \mathrm{F}) \qquad \varphi[\mathrm{F}] \vdash \varphi[\mathrm{F}]}{!(z =^b \mathrm{F}),\ \varphi[\mathrm{F}] \vdash\ !(z =^b \mathrm{F}) \otimes \varphi[\mathrm{F}]} \qquad !(z =^b \mathrm{F}) \otimes \varphi[\mathrm{F}] \vdash \varphi[z]}{!(z =^b \mathrm{F}),\ \varphi[\mathrm{F}] \vdash \varphi[z]}}{!(z =^b \mathrm{F}) \vdash \varphi[z]}$$

Se a dedução acima corresponder a (2), tem-se então:

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash\ !(z =^b \mathrm{T}) \oplus\ !(z =^b \mathrm{F})}\ (\text{Axioma 6}) \qquad \dfrac{\overset{(1)}{!(z =^b \mathrm{T}) \vdash \varphi[z]} \qquad \overset{(2)}{!(z =^b \mathrm{F}) \vdash \varphi[z]}}{!(z =^b \mathrm{T}) \oplus\ !(z =^b \mathrm{F}) \vdash \varphi[z]}\ (\oplus\ \mathrm{L})}{\vdash \varphi[z]}\ (\text{corte})$$

2.

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash\ !(\mathrm{T} =^b \mathrm{T})}\ (\text{Axioma 1}) \qquad \varphi \vdash \varphi}{!(\mathrm{T} =^b \mathrm{T}) \multimap \varphi \vdash \varphi}\ (\multimap\ \mathrm{L})$$

A outra afirmação de 2. é análoga, visto que também temos, novamente pelo Axioma 1, que $!(\mathrm{F} =^b \mathrm{F})$.

3.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{(Axioma 5)}}{\vdash\ !(\mathrm{T} =^b \mathrm{F}) \multimap 0}}{!(\mathrm{T} =^b \mathrm{F}) \vdash 0} \qquad \varphi, 0 \vdash \psi}{\varphi, !(\mathrm{T} =^b \mathrm{F}) \vdash \psi}\ \text{(corte)}}{\varphi \vdash\ !(\mathrm{T} =^b \mathrm{F}) \multimap \psi}\ (\multimap\mathrm{R})$$

4.

$(\multimap)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{(Lema 2.5.2)}}{!(\mathrm{T} =^b \mathrm{T}) \multimap \varphi \vdash \varphi}}{(!(\mathrm{T} =^b \mathrm{T}) \multimap \varphi) \ \&\ (!(\mathrm{T} =^b \mathrm{F}) \multimap \psi) \vdash \varphi}\ (\&\mathrm{L})}{\varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi \vdash \varphi}\ \text{(por definição de } \diamond_{\mathrm{T}})}{\vdash \varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi \multimap \varphi}\ (\multimap\mathrm{R})$$

$(\multimapinv)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi}{\varphi, !(\mathrm{T} =^b \mathrm{T}) \vdash \varphi}\ \text{(enfraq)}}{\varphi \vdash\ !(\mathrm{T} =^b \mathrm{T}) \multimap \varphi}\ (\multimap\mathrm{R}) \qquad \overset{\text{(Lema 2.5.3)}}{\varphi \vdash\ !(\mathrm{T} =^b \mathrm{F}) \multimap \psi}}{\varphi \vdash (!(\mathrm{T} =^b \mathrm{T}) \multimap \varphi) \ \&\ (!(\mathrm{T} =^b \mathrm{F}) \multimap \psi)}\ (\&\mathrm{R})}{\vdash \varphi \multimap (!(\mathrm{T} =^b \mathrm{T}) \multimap \varphi) \ \&\ (!(\mathrm{T} =^b \mathrm{F}) \multimap \psi)}\ (\multimap\mathrm{R})}{\vdash \varphi \multimap \varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi}\ \text{(por definição)}$$

Mais uma vez, a segunda afirmação desta alínea prova-se de modo análogo.

5.

$(\multimap)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{(Lema 2.5.4)}}{\vdash\ !\varphi \diamond_{\mathrm{T}} !\psi \multimapboth\ !\varphi}}{\vdash (!\varphi \diamond_{\mathrm{T}} !\psi \multimap\ !\varphi) \ \&\ (!\varphi \multimap\ !\varphi \diamond_{\mathrm{T}} !\psi)}}{\vdash\ !\varphi \diamond_{\mathrm{T}} !\psi \multimap\ !\varphi}}{!\varphi \diamond_{\mathrm{T}} !\psi \vdash\ !\varphi} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\text{(Lema 2.5.4)}}{\vdash\ !\varphi \multimap\ !\varphi \diamond_{\mathrm{T}} !\psi}}{!\varphi \vdash\ !\varphi \diamond_{\mathrm{T}} !\psi}}{!\varphi \vdash\ !(!\varphi \diamond_{\mathrm{T}} !\psi)}\ (!\mathrm{R})}{\dfrac{!\varphi \diamond_{\mathrm{T}} !\psi \vdash\ !(!\varphi \diamond_{\mathrm{T}} !\psi)}{\vdash\ !\varphi \diamond_{\mathrm{T}} !\psi \multimap\ !(!\varphi \diamond_{\mathrm{T}} !\psi)}\ (\multimap\mathrm{R})}\ \text{(corte)}$$

Seja (3) a dedução acima. Analogamente se prova, utilizando a segunda afirmação da alínea 4. deste Lema, que $\vdash\, !\varphi \diamond_{\mathrm{F}} !\psi \multimap !(!\varphi \diamond_{\mathrm{F}} !\psi)$; suponhamos que (4) representa tal prova. Assim:

$$\dfrac{\overset{(3)}{\vdash\, !\varphi \diamond_{\mathrm{T}} !\psi \multimap !(!\varphi \diamond_{\mathrm{T}} !\psi)} \qquad \overset{(4)}{\vdash\, !\varphi \diamond_{\mathrm{F}} !\psi \multimap !(!\varphi \diamond_{\mathrm{F}} !\psi)}}{\vdash\, !\varphi \diamond_{\mathrm{z}} !\psi \multimap !(!\varphi \diamond_{\mathrm{z}} !\psi)}\ \text{(Lema 2.5.1)}$$

$(\multimapinv)$:

$$\dfrac{\dfrac{!\varphi \diamond_z !\psi \vdash\, !\varphi \diamond_z !\psi}{!(!\varphi \diamond_z !\psi) \vdash\, !\varphi \diamond_z !\psi}\ (!\mathrm{L})}{\vdash\, !(!\varphi \diamond_z !\psi) \multimap !\varphi \diamond_z !\psi}\ (\multimap\mathrm{R})$$

$\square$

CAPÍTULO 3

Uma Interpretação Funcional Parametrizada de ILL^ω

Designamos por ILL^ω *pura* o fragmento de ILL^ω onde não ocorre o exponencial !. Neste capítulo apresentaremos em primeiro lugar uma interpretação funcional de ILL^ω pura, para mais tarde considerarmos várias extensões desta à lógica ILL^ω, com diferentes possibilidades de interpretação do exponencial !.

3.1 A Notação de Jogos.

A interpretação básica que apresentaremos na secção seguinte fará uso da *notação de jogos*, que passaremos a descrever e motivar.

Começamos por observar que as bem conhecidas interpretações funcionais que apresentámos no Capítulo 2 são estruturalmente muito semelhantes, podendo, como veremos, ser apresentadas como uma correspondência da forma

$$\varphi \quad \rightsquigarrow \quad \exists \mathbf{x}\, \forall \mathbf{y}\; \widetilde{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

(onde, naturalmente, a definição de $\widetilde{\varphi}$ depende da interpretação funcional particular considerada). No que se segue, contudo, não representaremos desta forma a fórmula à direita; escreveremos, em vez disso,

$$|\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}.$$

Esta notação tem a clara vantagem de ser mais simples que a primeira. Além disso, permite-nos talvez compreender mais claramente que esta fórmula pode ser encarada como um *jogo* entre dois jogadores – digamos, a Heloísa ($\exists$loise) e o Abelardo ($\forall$belardo)[1]. Cada jogo consiste numa única jogada para cada um dos participantes, e processar-se-á do seguinte modo. Heloísa joga em primeiro lugar; o seu movimento é feito com a(s) "peça(s)" $\mathbf{x}$. Abelardo joga em seguida, com $\mathbf{y}$ (já conhecendo a jogada de Heloísa). Se a afirmação final

[1] Ao leitor curioso deixamos a seguinte nota: os nomes dos dois jogadores são inspirados em Héloïse d'Argenteuil e Peter Abélard, dois correspondentes e enamorados do século XI.

for verdadeira – isto é, se se tem $\tilde{\varphi}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ – então Heloísa ganha a partida; caso contrário, é Abelardo o vencedor.

Assim, a tarefa de determinar a veracidade de $|\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}$ pode ser encarada como um jogo em que Heloísa procura arranjar *testemunhas* para a fórmula, ao passo que Abelardo tenta arranjar *contra-exemplos*. Pode pensar-se em $|\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}$ como algo semelhante a uma função – a função de resultados – que, dados movimentos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ da Eloísa e do Abelardo, respectivamente, determina qual o jogador vencedor.

Heloísa terá uma estratégia vencedora se existir $\mathbf{x}$ tal que, para qualquer movimento $\mathbf{y}$ de Abelardo, se tenha $|\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}$. Veremos mais tarde que a nossa interpretação é tal que, de uma dedução de φ naquele que será o *sistema interpretado* poderá extrair-se a existência de uma estratégia vencedora para Heloísa, juntamente com uma prova de que a estratégia é efectivamente uma estratégia vencedora, no *sistema de verificação*[2].

3.2 Uma Interpretação Funcional Básica de ILL^ω pura.

Recordamos que, no presente texto, a notação $\mathbf{x},\mathbf{y},\ldots$ é utilizada para designar sequências finitas (possivelmente vazias) de variáveis, e, similarmente, $\mathbf{a},\mathbf{b},\ldots$ denota tuplos de termos.

Definição 3.1. (Interpretação Funcional Básica de ILL^ω pura.)

A cada fórmula φ de ILL^ω na qual não ocorre o conectivo ! associamos uma fórmula $|\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}$ de ILL^ω_b, onde $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são duas sequências finitas de variáveis que não ocorrem em φ, indutivamente, como se segue:

- Se φ_{at} é fórmula atómica, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são a sequência vazia e $|\varphi_{\mathsf{at}}| :\equiv \varphi_{\mathsf{at}}$.

  Assuma-se que as interpretações de φ e ψ estão já definidas e correspondem, respectivamente, a $|\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}$ e $|\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}}$. Definimos:

- $|\varphi \otimes \psi|^{\mathbf{x},\mathbf{v}}_{\mathbf{y},\mathbf{w}} :\equiv |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \otimes |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}}$;
- $|\varphi \& \psi|^{\mathbf{x},\mathbf{v}}_{\mathbf{y},\mathbf{w},z} :\equiv |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \ \diamond_z \ |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}}$;
- $|\varphi \oplus \psi|^{\mathbf{x},\mathbf{v},z}_{\mathbf{y},\mathbf{w}} :\equiv |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \ \diamond_z \ |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}}$;
- $|\varphi \multimap \psi|^{\mathbf{f},\mathbf{g}}_{\mathbf{x},\mathbf{w}} :\equiv |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{fxw}} \multimap |\psi|^{\mathbf{gx}}_{\mathbf{w}}$;
- $|\forall z\ \varphi(z)|^{\mathbf{f}}_{\mathbf{y},z} :\equiv |\varphi(z)|^{\mathbf{f}z}_{\mathbf{y}}$;
- $|\exists z\ \varphi(z)|^{\mathbf{x},z}_{\mathbf{y}} :\equiv |\varphi(z)|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}$

[2] Isto é, o sistema em que as fórmulas são interpretadas.

Do ponto de vista heurístico que apresentámos anteriormente, pode constatar-se que a definição apresentada acima é muito natural. Ilustraremos esta afirmação com alguns exemplos.

Considere-se, a título de exemplo, a interpretação de uma fórmula da forma $\varphi\&\psi$. Como sabemos, o conectivo & funciona como uma versão enfraquecida da conjunção habitual e, assim, uma testemunha para a fórmula $\varphi\&\psi$ terá necessariamente que consistir numa testemunha para φ e numa testemunha para ψ. Repare-se que, aqui, a vantagem pertence a Abelardo; qualquer que seja o *jogo* z por ele escolhido (isto é, quer ele decida tomar $z = \mathrm{T}$ ou $z = \mathrm{F}$), Heloísa deve, para vencer, fornecer uma testemunha da fórmula correspondente. Por sua vez, para vencer, Abelardo tem apenas de providenciar um contra-exemplo para uma das fórmulas.

De modo dual, em fórmulas da forma $\varphi \oplus \psi$ a vantagem pertence a Heloísa: para vencer necessita apenas de escolher o jogo que pretende jogar (isto é, de novo, $z = \mathrm{T}$ ou $z = \mathrm{F}$) e fornecer uma testemunha para esse jogo (visto que, como sabemos, $\oplus$ actua como uma disjunção). Por sua vez, para ter a *garantia* de conseguir vencer, Abelardo deve ter contra-exemplos para ambas as fórmulas φ e ψ.

Ponderemos agora a definição da interpretação de uma fórmula da forma $\varphi \multimap \psi$. Como se sabe, Heloísa vence o jogo se a fórmula for *demonstrável* – caso em que ser-lhe-á possível fornece uma sua testemunha –, e Abelardo vencerá se não o for (podendo então apresentar um contra-exemplo). Ora, intuitivamente, Eloísa tem duas formas de vencer: pode, dada uma testemunha de φ, apresentar uma testemunha de ψ; ou, dado um contra-exemplo de ψ, vencerá se apresentar também um contra-exemplo para φ. Formalmente, tal significa que a sua jogada deve ser constituída por uma função $\mathbf{g}$ tal que para cada $\mathbf{x}$ testemunha de φ, $\mathbf{gx}$ seja testemunha de ψ, e por uma outra função $\mathbf{f}$ tal que, dados $\mathbf{x}$ e $\mathbf{w}$ jogados por Abelardo (respectivamente, uma tentativa de testemunhar φ e um contra-exemplo para ψ), $\mathbf{fxw}$ seja um contra–exemplo para φ. Abelardo vencerá se conseguir apresentar uma testemunha $\mathbf{x}$ para φ e, simultaneamente, um contra-exemplo $\mathbf{w}$ para ψ.

Consideremos ainda a interpretação da fórmula $\forall z\ \varphi$. Heloísa vence se, qualquer que seja o jogo (isto é, z) que Abelardo escolha jogar, conseguir arranjar uma testemunha para a fórmula $|\varphi(z)|$. Por conseguinte, a jogada da Heloísa consiste necessariamente numa função, que a cada possível jogo z faz corresponder uma testemunha $\mathbf{f}z$ de $|\varphi(z)|$, ao passo que, para Abelardo ganhar, tem apenas que apresentar um contra-exemplo $\mathbf{y}$ para a fórmula $|\varphi|$. Note-se que aqui, naturalmente, a vantagem pertence a Abelardo.[3]

A interpretação acima definida é correcta, como afirma o Teorema seguinte.

[3] Como não poderia deixar de ser, no caso $\exists \mathbf{x}\ \varphi$ é Heloísa quem tem a vantagem - basta-lhe, afinal, escolher um jogo z e uma testemunha $\mathbf{x}$ para $|\varphi(z)|$.

Teorema 3.2. *(Teorema da Correcção.)*

Sejam $\varphi_0, \ldots, \varphi_n, \psi$ *fórmulas de* ILL^ω *pura, cujas variáveis livres estão entre as variáveis do tuplo* $\mathbf{z}$.

Suponhamos que

$$\varphi_0(\mathbf{z}), \ldots, \varphi_n(\mathbf{z}) \vdash \psi(\mathbf{z})$$

é dedutível em ILL^ω *pura. Então existem termos* $\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$, *com* $FV(\mathbf{a}_i) \subseteq \{\mathbf{z}, \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{w}\}$ *e* $FV(\mathbf{b}) \subseteq \{\mathbf{z}, \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_n\}$, *que podem ser extraídos de tal dedução tais que*

$$|\varphi_0(\mathbf{z})|^{\mathbf{x}_0}_{\mathbf{a}_0}, \ldots, |\varphi_n(\mathbf{z})|^{\mathbf{x}_n}_{\mathbf{a}_n} \vdash |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}$$

é dedutível em ILL^ω_b.

Demonstração. A prova é por indução na derivação de $\varphi_0(\mathbf{z}), \ldots, \varphi_n(\mathbf{z}) \vdash \psi(\mathbf{z})$; basta-nos portanto verificar que o teorema é verdadeiro para cada axioma e cada regra de ILL^ω pura. Sejam então φ, ψ e θ fórmulas de ILL^ω pura.

- Identidade: Pretende ver-se que existem termos $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ tais que

  $$|\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}} \vdash |\varphi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{y}}.$$

  Basta então tomar-se $a := y$ e $b := x$. O resultado sai do axioma da Identidade.

- *Ex falso quolibet*: Dado Γ um conjunto arbitrário de fórmulas de ILL^ω pura, queremos mostrar que existem termos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ tais que

  $$|\Gamma|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}}, |0| \vdash |\varphi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{y}}.$$

  0 interpreta-se a si próprio, dado que é fórmula atómica; visto que existe um termo (fechado) de cada tipo, basta escolhermos para $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ termos arbitrários de tipos apropriados, e o resultado sai do axioma correspondente.

- Permutação: Imediato; basta permutar os termos (cuja existência é garantida por hipótese de indução).

- Corte: Assumamos, como hipótese de indução, que existem termos γ, $\mathbf{a}_0$, δ, $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{b}$ tais que $|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma} \vdash |\varphi|^{\mathbf{a}_0}_{\mathbf{y}}$, e $|\Delta|^{\mathbf{v}}_{\delta}, |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}_1} \vdash |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}$. Tem-se:

  $$\dfrac{\dfrac{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma} \vdash |\varphi|^{\mathbf{a}_0}_{\mathbf{y}}}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma'} \vdash |\varphi|^{\mathbf{a}_0}_{\mathbf{a}_1[\mathbf{a}_0]}}\left[\frac{\mathbf{a}_1[\mathbf{a}_0]}{\mathbf{y}}\right] \qquad \dfrac{|\Delta|^{\mathbf{v}}_{\delta}, |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}_1[\mathbf{x}]} \vdash |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}{|\Delta|^{\mathbf{v}}_{\delta'}, |\varphi|^{\mathbf{a}_0}_{\mathbf{a}_1[\mathbf{a}_0]} \vdash |\psi|^{\mathbf{b}'}_{\mathbf{w}}}\left[\frac{\mathbf{a}_0}{\mathbf{x}}\right]}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma'}, |\Delta|^{\mathbf{v}}_{\delta'} \vdash |\psi|^{\mathbf{b}'}_{\mathbf{w}}}\ \text{(corte)}$$

onde γ' se obtém de γ através da substituição $[\frac{\mathbf{a}_1[\mathbf{a}_0]}{\mathbf{y}}]$, e δ' e $\mathbf{b}'$ se obtêm de δ e $\mathbf{b}$, respectivamente, através da substituição $[\frac{\mathbf{a}_0}{x}]$.

- $\otimes$L: Por hipótese de indução, existem termos γ, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ tais que $|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma}$, $|\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}}$, $|\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}} \vdash |\theta|^{\mathbf{c}}_{\mathbf{w}}$. Tem-se:

$$\dfrac{\dfrac{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma}, |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}}, |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}} \vdash |\theta|^{\mathbf{c}}_{\mathbf{w}}}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma}, |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}} \otimes |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}} \vdash |\theta|^{\mathbf{c}}_{\mathbf{w}}}\ (\otimes\mathrm{L})}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma}, |\varphi \otimes \psi|^{\mathbf{x},\mathbf{v}}_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \vdash |\theta|^{\mathbf{c}}_{\mathbf{w}}}\ (\text{Definição 3.1})$$

- $\otimes$R:

$$\dfrac{\dfrac{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma} \vdash |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \qquad |\Delta|^{\mathbf{v}}_{\delta} \vdash |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma}, |\Delta|^{\mathbf{v}}_{\delta} \vdash |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \otimes |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}\ (\otimes\mathrm{R})}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma}, |\Delta|^{\mathbf{v}}_{\delta} \vdash |\varphi \otimes \psi|^{\mathbf{a},\mathbf{b}}_{\mathbf{y},\mathbf{w}}}\ (\text{Definição 3.1})$$

- &L:

$$\dfrac{\dfrac{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma}, |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}} \vdash |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma}, |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}} \diamond_{\mathrm{T}} |\theta|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{c}} \vdash |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}\ (\text{Lema 2.5.4})}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma}, |\varphi \& \theta|^{\mathbf{x},\mathbf{v}}_{\mathbf{a},\mathbf{c},\mathrm{T}} \vdash |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}\ (\text{Definição 3.1})$$

Observe-se que, mais uma vez, usamos aqui de modo essencial o facto de existirem termos de qualquer tipos arbitrário; é essa a razão que nos permite escolher termos $\mathbf{c}$ apropriados. O outro caso &L é análogo.

- &R:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma_0} \vdash |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \qquad \dfrac{\dfrac{(\text{Axioma 4} + \text{Lema 2.2.8})}{\vdash |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \multimap |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \diamond_{\mathrm{T}} |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}}{|\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \vdash |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \diamond_{\mathrm{T}} |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}\ (\text{Lema 2.2.7})}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma_0} \vdash |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \diamond_{\mathrm{T}} |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}\ (\text{corte})}{\vdash |\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma_0} \multimap |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \diamond_{\mathrm{T}} |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}\ (\multimap\mathrm{R})}{\vdash |\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\mathrm{T}(\gamma_0,\gamma_1)} \multimap |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \diamond_{\mathrm{T}} |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}\ (\text{Axioma 7})$$

Seja (5) a dedução acima. Analogamente se constrói a seguinte dedução, que representaremos por (6):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma_1} \vdash |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}} \qquad \dfrac{\vdash |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}} \multimap |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \diamond_{\mathrm{F}} |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}{|\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}} \vdash |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \diamond_{\mathrm{F}} |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma_1} \vdash |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \diamond_{\mathrm{F}} |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}}{\vdash |\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma_1} \multimap |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \diamond_{\mathrm{F}} |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}}{\vdash |\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\mathrm{F}(\gamma_0,\gamma_1)} \multimap |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \diamond_{\mathrm{F}} |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}$$

Juntando as duas deduções anteriores, obtém-se do seguinte modo o pretendido:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(5)}{\vdash |\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\mathrm{T}(\gamma_0,\gamma_1)} \multimap |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \diamond_{\mathrm{T}} |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}} \qquad \overset{(6)}{\vdash |\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\mathrm{F}(\gamma_0,\gamma_1)} \multimap |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \diamond_{\mathrm{F}} |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}}{\vdash |\Gamma|^{\mathbf{u}}_{z(\gamma_0,\gamma_1)} \multimap |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \diamond_{\mathrm{z}} |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}\;(\text{Lema 2.5.1})}{\vdash |\Gamma|^{\mathbf{u}}_{z(\gamma_0,\gamma_1)} \multimap |\varphi \& \psi|^{\mathbf{a},\mathbf{b}}_{\mathbf{y},\mathbf{w},z}}\;(\text{Definição 3.1})}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{z(\gamma_0,\gamma_1)} \vdash |\varphi \& \psi|^{\mathbf{a},\mathbf{b}}_{\mathbf{y},\mathbf{w},z}}\;(\text{Lema 2.2.7})$$

- $\oplus$L:

De novo como na alínea anterior, utilizaremos aqui o Lema 2.5.1. Para tal, considerem-se em primeiro lugar as seguintes deduções, que denotaremos por (7) e (8), respectivamente:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(\text{Lema 2.5.4})}{\vdash |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}} \diamond_{\mathrm{T}} |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}} \multimapboth |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}}}}{\vdash |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}} \diamond_{\mathrm{T}} |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}} \multimap |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}}}\;(\text{Lema 2.2.8})}{|\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}} \diamond_{\mathrm{T}} |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}} \vdash |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}}} \qquad |\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma_0}, |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}} \vdash |\theta|^{\mathbf{c}_0}_{\mathbf{w}}}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma_0}, |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}} \diamond_{\mathrm{T}} |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}} \vdash |\theta|^{\mathbf{c}_0}_{\mathbf{w}}}\;(\text{corte})}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\mathrm{T}(\gamma_0,\gamma_1)}, |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}} \diamond_{\mathrm{T}} |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}} \vdash |\theta|^{\mathrm{T}(\mathbf{c}_0,\mathbf{c}_1)}_{\mathbf{w}}}\;(\text{Axioma 7})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}} \diamond_{\mathrm{F}} |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}} \multimapboth |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}}}{\vdash |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}} \diamond_{\mathrm{F}} |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}} \multimap |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}}}}{|\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}} \diamond_{\mathrm{F}} |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}} \vdash |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}}} \qquad |\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma_1}, |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}} \vdash |\theta|^{\mathbf{c}_1}_{\mathbf{w}}}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma_1}, |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}} \diamond_{\mathrm{F}} |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}} \vdash |\theta|^{\mathbf{c}_1}_{\mathbf{w}}}}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\mathrm{F}(\gamma_0,\gamma_1)}, |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}} \diamond_{\mathrm{F}} |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}} \vdash |\theta|^{\mathrm{F}(\mathbf{c}_0,\mathbf{c}_1)}_{\mathbf{w}}}$$

Temos então:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{(7)}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\mathrm{T}(\gamma_0,\gamma_1)}, |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}} \diamond_{\mathrm{T}} |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}} \vdash |\theta|^{\mathrm{T}(\mathbf{c}_0,\mathbf{c}_1)}_{\mathbf{w}}} \qquad \overset{(8)}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\mathrm{F}(\gamma_0,\gamma_1)}, |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}} \diamond_{\mathrm{F}} |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}} \vdash |\theta|^{\mathrm{F}(\mathbf{c}_0,\mathbf{c}_1)}_{\mathbf{w}}}}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{z(\gamma_0,\gamma_1)}, |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}} \diamond_{z} |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}} \vdash |\theta|^{z(\mathbf{c}_0,\mathbf{c}_1)}_{\mathbf{w}}}\;(\text{Lema 2.5.1})}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{z(\gamma_0,\gamma_1)}, |\varphi \oplus \psi|^{\mathbf{x},\mathbf{v},z}_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \vdash |\theta|^{z(\mathbf{c}_0,\mathbf{c}_1)}_{\mathbf{w}}}\;(\text{Definição 3.1})$$

Visto que, por hipótese de indução, $FV(\mathbf{c}_0) \subseteq \{\mathbf{u}, \mathbf{x}\}$ e $FV(\mathbf{c}_1) \subseteq \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, vem que $FV(z(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1)) \subseteq \{\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{v}, z\}$, como se pretendia.

- $\oplus$R:

$$
\dfrac{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma} \vdash |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{(Lema 2.5.4)}}{\vdash |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \diamond_{\mathrm{T}} |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}} \multimapboth |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}}}}{\vdash |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \multimap |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \diamond_{\mathrm{T}} |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}\,\text{(Lema 2.2.8)}}{|\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \vdash |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \diamond_{\mathrm{T}} |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}\,\text{(Lema 2.2.7)}}{\dfrac{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma} \vdash |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \diamond_{\mathrm{T}} |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma} \vdash |\varphi \oplus \psi|^{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathrm{T}}_{\mathbf{y},\mathbf{w}}}\,\text{(Definição 3.1)}}\,\text{(corte)}
$$

Nesta dedução utilizamos o facto de existirem termos de todos os tipos na primeira linha, ao tomarmos os termos $\mathbf{b}$. A outra regra $\oplus$R prova-se de modo análogo.

- $\multimap$L:

$$
\dfrac{\dfrac{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma[\mathbf{y}]} \vdash |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}}}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma[\mathbf{fa}(\mathbf{b}[\mathbf{ga}])]} \vdash |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{fa}(\mathbf{b}[\mathbf{ga}])}}\,[\tfrac{\mathbf{fa}(\mathbf{b}[\mathbf{ga}])}{\mathbf{y}}] \qquad \dfrac{|\Delta|^{\mathbf{w}}_{\delta[\mathbf{v}]}, |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}[\mathbf{v}]} \vdash |\theta|^{\mathbf{c}[\mathbf{v}]}_{\mathbf{z}}}{|\Delta|^{\mathbf{w}}_{\delta[\mathbf{ga}]}, |\psi|^{\mathbf{ga}}_{\mathbf{b}[\mathbf{ga}]} \vdash |\theta|^{\mathbf{c}[\mathbf{ga}]}_{\mathbf{z}}}\,[\tfrac{\mathbf{ga}}{\mathbf{v}}]}{\dfrac{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma[\mathbf{fa}(\mathbf{b}[\mathbf{ga}])]}, |\Delta|^{\mathbf{w}}_{\delta[\mathbf{ga}]}, |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{fa}(\mathbf{b}[\mathbf{ga}])} \multimap |\psi|^{\mathbf{ga}}_{\mathbf{b}[\mathbf{ga}]} \vdash |\theta|^{\mathbf{c}[\mathbf{ga}]}_{\mathbf{z}}}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma[\mathbf{fa}(\mathbf{b}[\mathbf{ga}])]}, |\Delta|^{\mathbf{w}}_{\delta[\mathbf{ga}]}, |\varphi \multimap \psi|^{\mathbf{f},\mathbf{g}}_{\mathbf{a},\mathbf{b}[\mathbf{ga}]} \vdash |\theta|^{\mathbf{c}[\mathbf{ga}]}_{\mathbf{z}}}\,\text{(Definição 3.1)}}\,(\multimap\mathrm{L})
$$

Note-se que as dependências de variáveis são as pretendidas.

- $\multimap$R:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma}, |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}} \vdash |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma}, |\varphi|^{\mathbf{x}}_{(\lambda\mathbf{x},\mathbf{w}.\mathbf{a})\mathbf{x}\mathbf{w}} \vdash |\psi|^{(\lambda\mathbf{x}.\mathbf{b})\mathbf{x}}_{\mathbf{w}}}}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma} \vdash |\varphi|^{\mathbf{x}}_{(\lambda\mathbf{x},\mathbf{w}.\mathbf{a})\mathbf{x}\mathbf{w}} \multimap |\psi|^{(\lambda\mathbf{x}.\mathbf{b})\mathbf{x}}_{\mathbf{w}}}\,(\multimap\mathrm{R})}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma} \vdash |\varphi \multimap \psi|^{\lambda\mathbf{x},\mathbf{w}.\mathbf{a},\ \lambda\mathbf{x}.\mathbf{b}}_{\mathbf{x},\mathbf{w}}}\,\text{(Definição 3.1)}
$$

- $\forall$L:

$$
\dfrac{\dfrac{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma[\mathbf{x}]}, |\varphi(t)|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}[\mathbf{x}]} \vdash |\psi|^{\mathbf{b}[\mathbf{x}]}_{\mathbf{w}}}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma[\mathbf{f}t]}, |\varphi(t)|^{\mathbf{f}t}_{\mathbf{a}[\mathbf{f}t]} \vdash |\psi|^{\mathbf{b}[\mathbf{f}t]}_{\mathbf{w}}}\,[\tfrac{\mathbf{f}t}{\mathbf{x}}]}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma[\mathbf{f}t]}, |\forall z\ \varphi(z)|^{\mathbf{f}}_{\mathbf{a}[\mathbf{f}t],t} \vdash |\psi|^{\mathbf{b}[\mathbf{f}t]}_{\mathbf{w}}}\,\text{(Definição 3.1)}
$$

- $\forall$R:

$$\dfrac{\dfrac{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma[z]} \vdash |\varphi(z)|^{\mathbf{a}[z]}_{\mathbf{y}}}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma[z]} \vdash |\varphi(z)|^{(\lambda z.\mathbf{a}[z])z}_{\mathbf{y}}}}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma[z]} \vdash |\forall z\ \varphi(z)|^{\lambda z.\mathbf{a}[z]}_{\mathbf{y},z}} \text{ (Definição 3.1)}$$

Observamos que $FV(\lambda z.\mathbf{a}[z]) = FV(\mathbf{a})\backslash\{z\}$; daqui sai o pretendido.

- $\exists$L:

$$\dfrac{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma[z]}, |\varphi(z)|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}[z]} \vdash |\psi|^{\mathbf{b}[z]}_{\mathbf{y}}}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma[z]}, |\exists z\ \varphi(z)|^{\mathbf{x},z}_{\mathbf{a}[z]} \vdash |\psi|^{\mathbf{b}[z]}_{\mathbf{y}}} \text{ (Definição 3.1)}$$

- $\exists$R:

$$\dfrac{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma} \vdash |\varphi(t)|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}}}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma} \vdash |\exists z\ \varphi(z)|^{\mathbf{a},t}_{\mathbf{y}}} \text{ (Definição 3.1)}$$

□

Observamos que o Teorema anterior vem imediatamente válido no sistema restrito $\mathsf{ILL_r}^\omega$ (uma vez que o Teorema da Correcção para $\mathsf{ILL_r}^\omega$ é simplesmente um caso particular do anterior).

Definição 3.3. Sejam φ_{qf} e ψ_{qf} fórmulas de ILL^ω livres de quantificações e tais que $\mathbf{x}$ não ocorre em ψ_{qf}. Sejam ainda $\varphi_\forall$, $\psi_\forall$ fórmulas puramente universais de ILL^ω – isto é, fórmulas da forma $\forall \mathbf{x}\ \theta$, onde θ é uma fórmula livre de quantificações.

Definimos as versões lineares do Axioma da Escolha (AC_l), da Independência de Premissas (IP_l) e do Princípio de Markov (M_l), respectivamente, do seguinte modo:

$$AC_l := \forall \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ \varphi_\forall(\mathbf{y}) \multimap \exists \mathbf{f}\ \forall \mathbf{x}\ \varphi_\forall(\mathbf{fx})$$

$$IP_l := (\varphi_\forall \multimap \exists \mathbf{y}\ \psi_\forall) \multimap \exists \mathbf{y}\ (\varphi_\forall \multimap \psi_\forall),$$

supondo, em IP_l, que $\mathbf{y}$ não ocorre em $\varphi_\forall$,

$$M_l := (\forall \mathbf{x}\ \varphi_{\mathsf{qf}} \multimap \psi_{\mathsf{qf}}) \multimap \exists \mathbf{x}\ (\varphi_{\mathsf{qf}} \multimap \psi_{\mathsf{qf}})$$

Definimos ainda um novo princípio, que denotaremos por Princípio Extra (EP), do seguinte modo:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{v}\ (\varphi_{\mathsf{qf}} \otimes \psi_{\mathsf{qf}}) \multimap (\forall \mathbf{x} \varphi_{\mathsf{qf}} \otimes \forall \mathbf{v} \psi_{\mathsf{qf}}),$$

onde se supõe que $\mathbf{x}$ não ocorre em ψ_{qf} e $\mathbf{v}$ não ocorre em φ_{qf}[4].

O lema que se segue, embora algo técnico, será essencial para o resultado de caracterização que exporemos de seguida.

Lema 3.4. *Sejam φ e ψ fórmulas de ILL^ω_b. As seguintes afirmações são demonstráveis em ILL^ω_b:*

1. $(\exists x\ \varphi) \otimes (\exists y\ \psi) \multimap\!\!\circ\ \exists x\ \exists y (\varphi \otimes \psi)$, *onde x não ocorre em ψ e y não ocorre em φ;*
2. $(\forall x\ \varphi) \otimes (\forall y\ \psi) \multimap \forall x\ \forall y\ (\varphi \otimes \psi)$, *onde x não ocorre em ψ e y não ocorre em φ;*
3. $\varphi\ \&\ \psi \multimap\!\!\circ\ \forall z\ (\varphi \diamond_z \psi)$;
4. $(\exists x\ \varphi) \diamond_z (\exists y\ \psi) \multimap\!\!\circ\ \exists x\ \exists y\ (\varphi \diamond_z \psi)$, *em que supomos que x não ocorre em ψ e y não ocorre em φ;*
5. $(\forall x\ \varphi) \diamond_z (\forall y\ \psi) \multimap\!\!\circ\ \forall x\ \forall y\ (\varphi \diamond_z \psi)$, *em que x não ocorre em ψ e y não ocorre em φ;*
6. $\exists \mathbf{f}\ \forall \mathbf{x}\ \varphi(\mathbf{f}\mathbf{x}) \multimap \forall \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ \varphi(\mathbf{y})$;
7. $\exists \mathbf{f}\ \exists \mathbf{g}\ \forall z\ (\varphi(\mathbf{f}z) \diamond_z \psi(\mathbf{g}z)) \multimap\!\!\circ\ \exists \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ \forall z\ (\varphi(\mathbf{x}) \diamond_z \psi(\mathbf{y}))$;
8. $\exists x\ \exists y\ (\varphi \oplus \psi) \multimap\!\!\circ\ (\exists x\ \varphi \oplus \exists y\ \psi)$, *onde x não ocorre em ψ e y não ocorre em φ;*
9. $\varphi \oplus \psi \multimap\!\!\circ\ \exists z\ (\varphi \diamond_z \psi)$;
10. $((\exists x\ \varphi) \multimap \psi) \multimap\!\!\circ\ \forall x\ (\varphi \multimap \psi)$, *em que x não ocorre em ψ;*
11. $(\exists y\ (\varphi \multimap \psi)) \multimap (\varphi \multimap (\exists y\ \psi))$, *onde y não ocorre em φ;*
12. $(\varphi \multimap (\forall y\ \psi)) \multimap\!\!\circ\ \forall y\ (\varphi \multimap \psi)$, *em que se supõe que y não ocorre em φ;*
13. $(\exists x\ (\varphi \multimap \psi)) \multimap ((\forall x\ \varphi) \multimap \psi)$, *onde x não ocorre em ψ.*

[4]Conjecturamos que este princípio é de facto indemonstrável em ILL^ω, mas não surgiu ainda nenhuma demonstração desse facto.

Demonstração.

1. Para a implicação linear directa, considere-se o seguinte:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi \qquad \psi \vdash \psi}{\varphi, \psi \vdash \varphi \otimes \psi}}{\varphi, \psi \vdash \exists y\ (\varphi \otimes \psi)}}{\varphi, \psi \vdash \exists x\ \exists y\ (\varphi \otimes \psi)}}{\exists x\ \varphi, \exists y\ \psi \vdash \exists x\ \exists y\ (\varphi \otimes \psi)}}{(\exists x\ \varphi) \otimes (\exists y\ \psi) \vdash \exists x\ \exists y\ (\varphi \otimes \psi)}}{\vdash ((\exists x\ \varphi) \otimes (\exists y\ \psi)) \multimap (\exists x\ \exists y\ (\varphi \otimes \psi))}
$$

Por sua vez, uma possível dedução da implicação recíproca é como se segue:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi}{\varphi \vdash \exists x\ \varphi} \qquad \dfrac{\psi \vdash \psi}{\psi \vdash \exists y\ \psi}}{\varphi, \psi \vdash (\exists x\ \varphi) \otimes (\exists y\ \psi)}}{\varphi \otimes \psi \vdash (\exists x\ \varphi) \otimes (\exists y\ \psi)}}{\exists y\ (\varphi \otimes \psi) \vdash (\exists x\ \varphi) \otimes (\exists y\ \psi)}}{\exists x\ \exists y\ (\varphi \otimes \psi) \vdash (\exists x\ \varphi) \otimes (\exists y\ \psi)}}{\vdash (\exists x\ \exists y\ (\varphi \otimes \psi)) \multimap ((\exists x\ \varphi) \otimes (\exists y\ \psi))}
$$

2. Basta considerar-se a seguinte dedução:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi}{\forall x\ \varphi \vdash \varphi} \qquad \dfrac{\psi \vdash \psi}{\forall y\ \psi \vdash \psi}}{\forall x\ \varphi, \forall y\ \psi \vdash \varphi \otimes \psi}}{(\forall x\ \varphi) \otimes (\forall y\ \psi) \vdash \varphi \otimes \psi}\ (*)}{(\forall x\ \varphi) \otimes (\forall y\ \psi) \vdash \forall y\ (\varphi \otimes \psi)}\ (**)}{(\forall x\ \varphi) \otimes (\forall y\ \psi) \vdash \forall x\ \forall y\ (\varphi \otimes \psi)}}{\vdash ((\forall x\ \varphi) \otimes (\forall y\ \psi)) \multimap (\forall x\ \forall y\ (\varphi \otimes \psi))}
$$

Observamos que em (*) é essencial que y não ocorra em φ, e em (**) é essencial que x não ocorra em ψ.

Note-se ainda que, na presença do Princípio Extra EP, sendo φ e ψ fórmulas livres de quantificadores, a fórmula acima é de facto uma equivalência, já que a implicação linear recíproca é simplesmente EP.

3.

$\multimap$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi}{\varphi \& \psi \vdash \varphi}}{\varphi \& \psi \vdash \varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi} \qquad \dfrac{\dfrac{\psi \vdash \psi}{\varphi \& \psi \vdash \psi}}{\varphi \& \psi \vdash \varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi}}{\varphi \& \psi \vdash \varphi \diamond_z \psi}\ (*)}{\varphi \& \psi \vdash \forall z\ (\varphi \diamond_z \psi)}}{\vdash (\varphi \& \psi) \multimap (\forall z\ (\varphi \diamond_z \psi))}$$

$\multimapinv$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi \multimapboth \varphi}{\vdash \varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi \multimap \varphi}}{\varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi \vdash \varphi}}{\forall z (\varphi \diamond_z \psi) \vdash \varphi} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi \multimapboth \psi}{\vdash \varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi \multimap \psi}}{\varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi \vdash \psi}}{\forall z (\varphi \diamond_z \psi) \vdash \psi}}{\forall z\ (\varphi \diamond_z \psi) \vdash \varphi \& \psi}}{\vdash (\forall z\ (\varphi \diamond_z \psi)) \multimap (\varphi \& \psi)}$$

4. Para a implicação linear directa, tem-se:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi \multimapboth \varphi}{\vdash \varphi \multimap \varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi}}{\varphi \vdash \varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi}}{\varphi \vdash \exists y\ (\varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi)}}{\varphi \vdash \exists x\ \exists y\ (\varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi)}}{\exists x\ \varphi \vdash \exists x\ \exists y\ (\varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi)}}{(\exists x\ \varphi) \diamond_{\mathrm{T}} (\exists y \psi) \vdash \exists x\ \exists y\ (\varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi \multimapboth \psi}{\vdash \psi \multimap \varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi}}{\psi \vdash \varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi}}{\psi \vdash \exists y\ (\varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi)}}{\psi \vdash \exists x\ \exists y\ (\varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi)}}{\exists y\ \psi \vdash \exists x\ \exists y\ (\varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi)}}{(\exists x\ \varphi) \diamond_{\mathrm{F}} (\exists y\ \psi) \vdash \exists x\ \exists y\ (\varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi)}}{\dfrac{(\exists x\ \varphi) \diamond_z (\exists y\ \psi) \vdash \exists x\ \exists y\ (\varphi \diamond_z \psi)}{\vdash ((\exists x\ \varphi) \diamond_z (\exists y\ \psi)) \multimap (\exists x\ \exists y\ (\varphi \diamond_z \psi))}}$$

Reciprocamente,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi}{\varphi \vdash \exists x\ \varphi}}{\varphi \vdash (\exists x\ \varphi) \diamond_{\mathrm{T}} (\exists y\ \psi)}}{\varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi \vdash (\exists x\ \varphi) \diamond_{\mathrm{T}} (\exists y\ \psi)}}{\exists y\ (\varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi) \vdash (\exists x\ \varphi) \diamond_{\mathrm{T}} (\exists y\ \psi)}}{\exists x\ \exists y\ (\varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi) \vdash (\exists x\ \varphi) \diamond_{\mathrm{T}} (\exists y\ \psi)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi \vdash \psi}{\psi \vdash \exists y\ \psi}}{\psi \vdash (\exists x\ \varphi) \diamond_{\mathrm{F}} (\exists y\ \psi)}}{\varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi \vdash (\exists x\ \varphi) \diamond_{\mathrm{F}} (\exists y\ \psi)}}{\exists y\ (\varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi) \vdash (\exists x\ \varphi) \diamond_{\mathrm{F}} (\exists y\ \psi)}}{\exists x\ \exists y\ (\varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi) \vdash (\exists x\ \varphi) \diamond_{\mathrm{F}} (\exists y\ \psi)}}{\dfrac{\exists x\ \exists y\ (\varphi \diamond_z \psi) \vdash (\exists x\ \varphi) \diamond_z (\exists y\ \psi)}{\vdash (\exists x\ \exists y\ (\varphi \diamond_z \psi)) \multimap ((\exists x\ \varphi) \diamond_z (\exists y\ \psi))}}$$

Observe-se que as restrições impostas às variáveis (nomeadamente, que x não ocorra em ψ e y não ocorra em φ) são necessárias apenas para a implicação recíproca.

5. O sentido directo corresponde à seguinte dedução:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} \vdash \varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi \multimapboth \varphi \\ \hline \vdash \varphi \multimap \varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi \\ \hline \varphi \vdash \varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi \\ \hline \forall x\; \varphi \vdash \varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi \\ \hline \forall x\; \varphi \vdash \forall y\; (\varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi) \\ \hline \forall x\; \varphi \vdash \forall x\; \forall y\; (\varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi) \\ \hline (\forall x\; \varphi) \diamond_{\mathrm{T}} (\forall y\; \psi) \vdash \forall x\; \forall y\; (\varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \vdash \varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi \multimapboth \psi \\ \hline \vdash \psi \multimap \varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi \\ \hline \psi \vdash \varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi \\ \hline \forall y\; \psi \vdash \varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi \\ \hline \forall y\; \psi \vdash \forall y\; (\varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi) \\ \hline \forall y\; \psi \vdash \forall x\; \forall y\; (\varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi) \\ \hline (\forall x\; \varphi) \diamond_{\mathrm{F}} (\forall y\; \psi) \vdash \forall x\; \forall y\; (\varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi) \end{array}}{(\forall x\; \varphi) \diamond_z (\forall y\; \psi) \vdash \forall x\; \forall y\; (\varphi \diamond_z \psi)}}{\vdash (\forall x\; \varphi) \diamond_z (\forall y\; \psi) \multimap \forall x\; \forall y\; (\varphi \diamond_z \psi)}$$

Por sua vez, a implicação recíproca deduz-se da seguinte forma:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} \vdash \varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi \multimapboth \varphi \\ \hline \vdash \varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi \multimap \varphi \\ \hline \varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi \vdash \varphi \\ \hline \forall y\; (\varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi) \vdash \varphi \\ \hline \forall x\; \forall y\; (\varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi) \vdash \varphi \\ \hline \forall x\; \forall y\; (\varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi) \vdash \forall x\; \varphi \\ \hline \forall x\; \forall y\; (\varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi) \vdash (\forall x\; \varphi) \diamond_{\mathrm{T}} (\forall y\; \psi) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \vdash \varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi \multimapboth \psi \\ \hline \vdash \varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi \multimap \psi \\ \hline \varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi \vdash \psi \\ \hline \forall y\; (\varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi) \vdash \psi \\ \hline \forall y\; (\varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi) \vdash \forall y\; \psi \\ \hline \forall x\; \forall y\; (\varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi) \vdash \forall y\; \psi \\ \hline \forall x\; \forall y\; (\varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi) \vdash (\forall x\; \varphi) \diamond_{\mathrm{F}} (\forall y\; \psi) \end{array}}{\forall x\; \forall y\; (\varphi \diamond_z \psi) \vdash (\forall x\; \varphi) \diamond_z (\forall y\; \psi)}}{\vdash \forall x\; \forall y\; (\varphi \diamond_z \psi) \multimap (\forall x\; \varphi) \diamond_z (\forall y\; \psi)}$$

Aqui, note-se que as restrições impostas às variáveis são necessárias apenas para o sentido directo.

6. Basta tomar $\mathbf{y} := \mathbf{fx}$, e o resultado segue. Observamos que, no caso em que a fórmula φ é puramente universal, este resultado é uma equivalência, correspondendo a implicação recíproca ao Axioma da Escolha linear AC_l.

7. Para a implicação directa, tomem-se $\mathbf{x} := \mathbf{f}\mathrm{T}$ e $\mathbf{y} := \mathbf{g}\mathrm{T}$. Ora, sabemos, porque um dos axiomas no-lo garante, que $z =^b \mathrm{T}$ ou $z =^b \mathrm{F}$. Se $z = \mathrm{T}$, o antecedente garante-nos que se tem $\varphi(\mathbf{f}\mathrm{T})$ e, portanto, $\varphi(\mathbf{f}\mathrm{T}) \diamond_{\mathrm{T}} \psi(\mathbf{g}\mathrm{F})$; isto é, $\varphi(\mathbf{x}) \diamond_{\mathrm{T}} \psi(\mathbf{y})$. Se, por outro lado, $z = \mathrm{F}$, do antecedente vem que se tem $\psi(\mathbf{g}\mathrm{F})$ e, portanto, $\varphi(\mathbf{f}\mathrm{T}) \diamond_{\mathrm{F}} \psi(\mathbf{g}\mathrm{F})$; ou seja, $\varphi(\mathbf{x}) \diamond_{\mathrm{F}} \psi(\mathbf{y})$. Assim podemos concluir que $\forall z\; (\varphi(\mathbf{x}) \diamond_z \psi(\mathbf{y}))$, como se pretendia.

Reciprocamente, definam-se as funções $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ do seguinte modo:

$$\mathbf{f}(z) = \mathbf{g}(z) = \begin{cases} \mathbf{x} & \text{se } z =^b \mathrm{T}, \\ \mathbf{y} & \text{se } z =^b \mathrm{F}. \end{cases}$$

Mais uma vez, basta analisar separadamente os casos $z = \mathrm{T}$ e $z = \mathrm{F}$; desta análise sai, sem dificuldade, o que se pretende.

8. A dedução da implicação directa é como se segue:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi}{\varphi \vdash \exists x\ \varphi}}{\varphi \vdash \exists x\ \varphi \oplus \exists y\ \psi} \qquad \dfrac{\dfrac{\psi \vdash \psi}{\psi \vdash \exists y\ \psi}}{\psi \vdash (\exists x\ \varphi) \oplus (\exists y\ \psi)}}{\varphi \oplus \psi \vdash (\exists x\ \varphi) \oplus (\exists y\ \psi)}}{\exists y\ (\varphi \oplus \psi) \vdash (\exists x\ \varphi) \oplus (\exists y\ \psi)}}{\exists x\ \exists y\ (\varphi \oplus \psi) \vdash (\exists x\ \varphi) \oplus (\exists y\ \psi)}}{\vdash (\exists x\ \exists y\ (\varphi \oplus \psi)) \multimap ((\exists x\ \varphi) \oplus (\exists y\ \psi))}
$$

Para a recíproca, considere-se o seguinte:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi}{\varphi \vdash \varphi \oplus \psi}}{\varphi \vdash \exists y\ (\varphi \oplus \psi)}}{\varphi \vdash \exists x\ \exists y\ (\varphi \oplus \psi)}}{\exists x\ \varphi \vdash \exists x\ \exists y\ (\varphi \oplus \psi)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi \vdash \psi}{\psi \vdash \varphi \oplus \psi}}{\psi \vdash \exists y\ (\varphi \oplus \psi)}}{\exists y\ \psi \vdash \exists y\ (\varphi \oplus \psi)}}{\exists y\ \psi \vdash \exists x\ \exists y\ (\varphi \oplus \psi)}}{(\exists x\ \varphi) \oplus (\exists y\ \psi) \vdash \exists x\ \exists y\ (\varphi \oplus \psi)}}{\vdash ((\exists x\ \varphi) \oplus (\exists y\ \psi)) \multimap (\exists x\ \exists y\ (\varphi \oplus \psi))}
$$

De novo se observa que o facto de x não ocorrer em ψ e y não ocorrer em φ é necessário apenas para o sentido directo; o recíproco demonstra-se sem quaisquer restrições.

9. Para a implicação linear directa, considere-se o seguinte:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi \multimapboth \varphi}{\vdash \varphi \multimap \varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi}}{\varphi \vdash \varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi}}{\varphi \vdash \exists z\ (\varphi \diamond_z \psi)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi \multimapboth \psi}{\vdash \psi \multimap \varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi}}{\psi \vdash \varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi}}{\psi \vdash \exists z\ (\varphi \diamond_z \psi)}}{\varphi \oplus \psi \vdash \exists z\ (\varphi \diamond_z \psi)}}{\vdash \varphi \oplus \psi \multimap \exists z\ (\varphi \diamond_z \psi)}
$$

Reciprocamente, temos:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi \multimapboth \varphi}{\vdash \varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi \multimap \varphi}}{\varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi \vdash \varphi}}{\varphi \diamond_{\mathrm{T}} \psi \vdash \varphi \oplus \psi} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi \multimapboth \psi}{\vdash \varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi \multimap \psi}}{\varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi \vdash \psi}}{\varphi \diamond_{\mathrm{F}} \psi \vdash \varphi \oplus \psi}}{\dfrac{\dfrac{\varphi \diamond_z \psi \vdash \varphi \oplus \psi}{\exists z\ (\varphi \diamond_z \psi) \vdash \varphi \oplus \psi}}{\vdash \exists z\ (\varphi \diamond_z \psi) \multimap \varphi \oplus \psi}}$$

Observe-se que o sentido inverso utiliza o facto de z ser uma variável nova (que não ocorre em $\varphi \oplus \psi$).

10.

$\multimap$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi}{\varphi \vdash \exists x\ \varphi} \qquad \psi \vdash \psi}{\varphi, (\exists x\ \varphi) \multimap \psi \vdash \psi}}{(\exists x\ \varphi) \multimap \psi \vdash \varphi \multimap \psi}}{(\exists x\ \varphi) \multimap \psi \vdash \forall x\ (\varphi \multimap \psi)}}{\vdash ((\exists x\ \varphi) \multimap \psi) \multimap (\forall x\ (\varphi \multimap \psi))}$$

$\multimapinv$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi \qquad \psi \vdash \psi}{\varphi, \varphi \multimap \psi \vdash \psi}}{\varphi, \forall x\ (\varphi \multimap \psi) \vdash \psi}}{\exists x\ \varphi, \forall x\ (\varphi \multimap \psi) \vdash \psi}}{\forall x\ (\varphi \multimap \psi) \vdash (\exists x\ \varphi) \multimap \psi}}{\vdash (\forall x\ (\varphi \multimap \psi)) \multimap ((\exists x\ \varphi) \multimap \psi)}$$

11. A dedução seguinte assegura o pretendido.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi \qquad \psi \vdash \psi}{\varphi, \varphi \multimap \psi \vdash \psi}}{\varphi, \varphi \multimap \psi \vdash \exists y\ \psi}}{\varphi, \exists y\ (\varphi \multimap \psi) \vdash \exists y\ \psi}}{\exists y\ (\varphi \multimap \psi) \vdash \varphi \multimap (\exists y\ \psi)}}{\vdash (\exists y\ (\varphi \multimap \psi)) \multimap (\varphi \multimap (\exists y\ \psi))}$$

Observamos também que, no caso em que φ e ψ são fórmulas puramente universais, a implicação linear recíproca corresponde a IP_l (e, portanto, na presença deste princípio e com a restrição imposta sobre as fórmulas φ e ψ tem-se equivalência), facto que usaremos mais tarde.

12.

$\multimap$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi \qquad \dfrac{\psi \vdash \psi}{\forall y\ \psi \vdash \psi}}{\varphi, \varphi \multimap (\forall y\ \psi) \vdash \psi}}{\varphi \multimap (\forall y\ \psi) \vdash \varphi \multimap \psi}}{\dfrac{\varphi \multimap (\forall y\ \psi) \vdash \forall y\ (\varphi \multimap \psi)}{\vdash (\varphi \multimap (\forall y\ \psi)) \multimap (\forall y\ (\varphi \multimap \psi))}}$$

$\multimapinv$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi \qquad \psi \vdash \psi}{\varphi, \varphi \multimap \psi \vdash \psi}}{\varphi, \forall y\ (\varphi \multimap \psi) \vdash \psi}}{\varphi, \forall y\ (\varphi \multimap \psi) \vdash \forall y\ \psi}}{\dfrac{\forall y\ (\varphi \multimap \psi) \vdash \varphi \multimap (\forall y\ \psi)}{\vdash (\forall y\ (\varphi \multimap \psi)) \multimap (\varphi \multimap (\forall y\ \psi))}}$$

13. Basta considerar-se a seguinte prova:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi \qquad \psi \vdash \psi}{\varphi, \varphi \multimap \psi \vdash \psi}}{\forall x\ \varphi, \varphi \multimap \psi \vdash \psi}}{\forall x\ \varphi, \exists x\ (\varphi \multimap \psi) \vdash \psi}}{\exists x\ (\varphi \multimap \psi) \vdash (\forall x\ \varphi) \multimap \psi}}{\vdash (\exists x\ (\varphi \multimap \psi)) \multimap ((\forall x\ \varphi) \multimap \psi)}$$

De modo similar ao que sucedeu anteriormente com os restantes princípios apresentados, fazemos notar que a implicação linear recíproca corresponde, no caso em que φ e ψ são livres de quantificadores, à versão linear do Princípio de Markov, M_l.

□

Importa referir que, embora o lema acima tenha sido enunciado para variáveis singulares, pode ser generalizado a sequências finitas de variáveis $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Se permitirmos a existência de tipos booleanos, a Lógica Linear Intuicionista (sobre todos os tipos finitos) pode ser formulada usando apenas os conectivos $\otimes, \diamond_z, \multimap, !$ e 0 (juntamente com os quantificadores $\forall$ e $\exists$), visto que – como testemunha o Lema 3.4, alíneas 3 e 9 – os conectivos & e $\oplus$ podem ser definidos à custa de $\diamond_z$. Poder-se-ia portanto tomar $\diamond_z$ como símbolo primitivo, excluindo então & e $\oplus$[5]. Esse facto ser-nos-á útil no Teorema seguinte.

Teorema 3.5. *(Teorema da Caracterização.)*

Seja φ uma fórmula arbitrária de ILL^ω. Tem-se:

$$\mathsf{ILL}^\omega_b + AC_l + IP_l + M_l + EP \vdash \varphi \multimapboth \exists \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}.$$

[5]Uma abordagem semelhante é apresentada em [28], no contexto da Lógica Linear Clássica.

Mais, suponha-se que $\diamond$ é um símbolo primitivo, interpretado da seguinte forma:

$$|\varphi \diamond_z \psi|^{\mathbf{x},\mathbf{v}}_{\mathbf{y},\mathbf{w}} :\equiv |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \diamond_z |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}}.$$

Então o resultado de caracterização acima enunciado ainda é verdadeiro e, admitindo que $!$ não ocorre em AC_l, IP_l, M_l e EP, estes princípios são interpretáveis; isto é, se P for uma qualquer instanciação de algum destes princípios, então existem termos $\mathbf{a}$ *tais que* $\mathsf{ILL}^\omega_b \vdash \forall \mathbf{y}\ |P|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}}$. *Note-se que, neste caso, as fórmulas livres de quantificadores se interpretam a si próprias.*

Demonstração. Note-se que a interpretação de qualquer fórmula é necessariamente uma fórmula livre de quantificadores; este facto, de demonstração imediata, será utilizado com frequência ao longo da presente demonstração.

No que se segue, sempre que considerarmos duas fórmulas distintas φ e ψ e as suas interpretações – digamos, $\exists \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}$ e $\exists \mathbf{v}\ \forall \mathbf{w}\ |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}}$, respectivamente – estaremos a supôr que as variáveis $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ não ocorrem em $|\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}}$, e que, do mesmo modo, $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ não ocorrem em $|\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}$[6]. Observe-se que tais suposições são legítimas, uma vez que $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são, nas interpretações de φ e ψ, variáveis mudas.

A equivalência linear acima demonstrar-se-á por indução na complexidade de φ. O caso atómico é trivial – não necessitando sequer dos princípios caracterizadores - uma vez que cada fórmula atómica é interpretada como ela própria.

Suponhamos então que a fórmula é da forma $\varphi \otimes \psi$. Tem-se:

$$\begin{array}{lll}
\varphi \otimes \psi & \multimap\!\!\circ\ \exists \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \otimes \exists \mathbf{v}\ \forall \mathbf{w}\ |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}} & \text{(por hipótese de indução)} \\
& \multimap\!\!\circ\ \exists \mathbf{x}\ \exists \mathbf{v} (\forall \mathbf{y}\ |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \otimes \forall \mathbf{w}\ |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}} & \text{(Lema 3.4.1)} \\
& \multimap\!\!\circ\ \exists \mathbf{x}\ \exists \mathbf{v}\ \forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{w}\ (|\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \otimes |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}}) & \text{(Lema 3.4.2 + } EP) \\
& \equiv \exists \mathbf{x}\ \exists \mathbf{v}\ \forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{w}\ |\varphi \otimes \psi|^{\mathbf{x},\mathbf{v}}_{\mathbf{y},\mathbf{w}} & \text{(por definição)}
\end{array}$$

Suponha-se agora que a fórmula é da forma $\varphi\ \&\psi$. Temos:

$$\begin{array}{lll}
\varphi\ \&\ \psi & \multimap\!\!\circ\ \exists \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}\ \&\ \exists \mathbf{v}\ \forall \mathbf{w}\ |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}} & \text{(por hipótese de indução)} \\
& \multimap\!\!\circ\ \forall z\ (\exists \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \diamond_z \exists \mathbf{v}\ \forall \mathbf{w}\ |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}} & \text{(Lema 3.4.3)} \\
& \multimap\!\!\circ\ \forall z\ \exists \mathbf{x}\ \exists \mathbf{v}\ (\forall \mathbf{y}\ |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \diamond_z \forall \mathbf{w}\ |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}}) & \text{(Lema 3.4.4)} \\
& \multimap\!\!\circ\ \forall z\ \exists \mathbf{x}\ \exists \mathbf{v}\ \forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{w}\ (|\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \diamond_z |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}}) & \text{(Lema 3.4.5)} \\
& \multimap\!\!\circ\ \forall z\ \exists \mathbf{x}, \mathbf{v}\ \forall \mathbf{y}, \mathbf{w}\ (|\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \diamond_z |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}}) & \\
& \multimap\!\!\circ\ \exists \mathbf{f}\ \exists \mathbf{g}\ \forall z\ \forall \mathbf{y}, \mathbf{w}\ (|\varphi|^{\mathbf{f}z}_{\mathbf{y}} \diamond_z |\psi|^{\mathbf{g}z}_{\mathbf{w}}) & \text{(Lema 3.4.6 + } AC_l) \\
& \multimap\!\!\circ\ \exists \mathbf{x}\ \exists \mathbf{v}\ \forall z\ \forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{w} (|\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \diamond_z |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}}) & \text{(Lema 3.4.7)} \\
& \equiv \exists \mathbf{x}\ \exists \mathbf{v}\ \forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{w}\ |\varphi \& \psi|^{\mathbf{x},\mathbf{v}}_{\mathbf{y},\mathbf{w},z]} & \text{(por definição)}
\end{array}$$

[6] Em particular tem-se que os conjuntos $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ e $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ são disjuntos.

Se a fórmula for da forma $\varphi \oplus \psi$, tem-se:

$$
\begin{array}{lll}
\varphi \oplus \psi & \multimapboth \exists \mathbf{x}\, \forall \mathbf{y}\, |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \oplus \exists \mathbf{v}\, \forall \mathbf{w}\, |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}} & \text{(por hipótese de indução)} \\
& \multimapboth \exists \mathbf{x}\, \exists \mathbf{v}\, (\forall \mathbf{y}\, |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \oplus \forall \mathbf{w}\, |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}}) & \text{(Lema 3.4.8)} \\
& \multimapboth \exists \mathbf{x}\, \exists \mathbf{v}\, \exists z\, (\forall \mathbf{y}\, |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \diamond_z \forall \mathbf{w}\, |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}}) & \text{(Lema 3.4.9)} \\
& \multimapboth \exists \mathbf{x}\, \exists \mathbf{v}\, \exists z\, \forall \mathbf{y}\, \forall \mathbf{w}\, (|\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \diamond_z |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}}) & \text{(Lema 3.4.5)} \\
& \multimapboth \exists \mathbf{x}\, \exists \mathbf{v}\, \exists z\, \forall \mathbf{y}\, \forall \mathbf{w}\, |\varphi \oplus \psi|^{\mathbf{x},\mathbf{v},z}_{\mathbf{y},\mathbf{w}} & \text{(por definição)}
\end{array}
$$

Para o caso $\varphi \multimap \psi$, tem-se o seguinte:

$$
\begin{array}{lll}
\varphi \multimap \psi & \multimapboth \exists \mathbf{x}\, \forall \mathbf{y}\, |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \multimap \exists \mathbf{v}\, \forall \mathbf{w}\, |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}} & \text{(por hipótese de indução)} \\
& \multimapboth \forall \mathbf{x}\, (\forall \mathbf{y}\, |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \multimap \exists \mathbf{v}\, \forall \mathbf{w}\, |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}}) & \text{(Lema 3.4.10)} \\
& \multimapboth \forall \mathbf{x}\, \exists \mathbf{v}\, (\forall \mathbf{y}\, |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \multimap \forall \mathbf{w}\, |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}}) & \text{(Lema 3.4.11 + } IP_l) \\
& \multimapboth \forall \mathbf{x}\, \exists \mathbf{v}\, \forall \mathbf{w}\, (\forall \mathbf{y}\, |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \multimap |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}}) & \text{(Lema 3.4.12)} \\
& \multimapboth \forall \mathbf{x}\, \exists \mathbf{v}\, \forall \mathbf{w}\, \exists \mathbf{y}\, (|\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \multimap |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}}) & \text{(Lema 3.4.13 + } M_l) \\
& \multimapboth \forall \mathbf{x}\, \exists \mathbf{v} \exists \mathbf{h}\, \forall \mathbf{w} (|\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{hw}} \multimap |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}}) & \text{(Lema 3.4.6 + } AC_l) \\
& \multimapboth \forall \mathbf{x}\, \exists \mathbf{v}, \mathbf{h}\, \forall \mathbf{w} (|\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{hw}} \multimap |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}}) & \\
& \multimapboth \exists \mathbf{g}, \mathbf{f}\, \forall \mathbf{x}\, \forall \mathbf{w}\, (|\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{fxw}} \multimap |\psi|^{\mathbf{gx}}_{\mathbf{w}}) & \text{(Lema 3.4. 6 + } AC_l) \\
& \multimapboth \exists \mathbf{g}\, \exists \mathbf{f}\, \forall \mathbf{x}\, \forall \mathbf{w}\, |\varphi \multimap \psi|^{\mathbf{f},\mathbf{g}}_{\mathbf{x},\mathbf{w}} & \text{(por definição)}
\end{array}
$$

Por sua vez, se a fórmula for da forma $\forall z\ \varphi$, temos:

$$
\begin{array}{lll}
\forall z\ \varphi & \multimapboth \forall z\, \exists \mathbf{x}\, \forall \mathbf{y}\, |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} & \text{(por hipótese de indução)} \\
& \multimapboth \exists \mathbf{f}\, \forall \mathbf{y}\, \forall z\, |\varphi|^{\mathbf{f}z}_{\mathbf{y}} & \text{(Lema 3.4.6 + } AC_l) \\
& \equiv \exists \mathbf{f}\, \forall \mathbf{y}\, \forall z\, |\forall z\ \varphi|^{\mathbf{f}}_{\mathbf{y},z} & \text{(por definição)}
\end{array}
$$

Por último, o caso do quantificador existencial: para fórmula da forma $\exists z\ \varphi$, tem-se:

$$
\begin{array}{lll}
\exists z\ \varphi & \multimapboth \exists z\, \exists \mathbf{x}\, \forall \mathbf{y}\, |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} & \text{(por hipótese de indução)} \\
& \equiv \exists \mathbf{x}\, \exists z\, \forall \mathbf{y}\, |\exists z\ \varphi|^{\mathbf{x},z}_{\mathbf{y}} & \text{(por definição).}
\end{array}
$$

Note-se que os casos atómico, $\varphi \oplus \psi$ e $\exists z\ \varphi$ não necessitam de quaisquer princípios caracterizadores; são prováveis em ILL^ω_b apenas (e são os únicos nestas circunstâncias).

Resta-nos então ver que, com as hipóteses enunciadas, os princípios AC_l, IP_l, M_l e EP são interpretáveis. Como afirmámos no enunciado, assumindo que $\diamond$ é um símbolo primitivo, verifica-se facilmente que as fórmulas livres de quantificadores se interpretam a si próprias, facto que utilizaremos neste segmento da demonstração. Verifiquemos então, a título de exemplo, a interpretabilidade de AC_l. Por um lado, a premissa é interpretada por:

$$
\begin{array}{ll}
|\forall \mathbf{x}\, \exists \mathbf{y}\, \forall \mathbf{z}\, \varphi_{\mathsf{qf}}|^{\mathbf{f}}_{\mathbf{z},\mathbf{x}} & \equiv |\exists \mathbf{y}\, \forall \mathbf{z}\, \varphi_{\mathsf{qf}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})|^{\mathbf{fx}}_{\mathbf{z}} \\
& \equiv |\forall \mathbf{z}\, \varphi_{\mathsf{qf}}(\mathbf{x}, \mathbf{fx}, \mathbf{z})|_{\mathbf{z}} \\
& \equiv |\varphi_{\mathsf{qf}}(\mathbf{x}, \mathbf{fx}, \mathbf{z})| \\
& \equiv \varphi_{\mathsf{qf}}(\mathbf{x}, \mathbf{fx}, \mathbf{z});
\end{array}
$$

acima, utilizámos apenas a definição da interpretação e a observação anterior relativa à interpretabilidade de φ_{qf}.

Similarmente, a conclusão de AC_l é interpretada como

$$\begin{aligned}|\exists \mathbf{f}\ \forall \mathbf{x}\ \forall \mathbf{z}\ \varphi_{\mathsf{qf}}(\mathbf{x}, \mathbf{fx}, \mathbf{z})|^{\mathbf{f}}_{\mathbf{z},\mathbf{x}} &\equiv |\forall \mathbf{x}\ \forall \mathbf{z}\ \varphi_{\mathsf{qf}}(\mathbf{x}, \mathbf{fx}, \mathbf{z})|_{\mathbf{z},\mathbf{x}} \\ &\equiv |\forall \mathbf{z}\ \varphi_{\mathsf{qf}}(\mathbf{x}, \mathbf{fx}, \mathbf{z})|_{\mathbf{z}} \\ &\equiv |\varphi_{\mathsf{qf}}(\mathbf{x}, \mathbf{fx}, \mathbf{z})| \\ &\equiv \varphi_{\mathsf{qf}}(\mathbf{x}, \mathbf{fx}, \mathbf{z}).\end{aligned}$$

Pode constatar-se que os realizadores da premissa e da conclusão coincidem. Assim, AC_l terá realizadores $\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}$ tais que, representando a fórmula que constitui o antecedente de AC_l por ψ, e a que constitui o consequente por θ, se tenha:

$$|\psi \multimap \theta|^{\tilde{\mathbf{f}},\tilde{\mathbf{g}}}_{\mathbf{f},\mathbf{z},\mathbf{x}} \equiv |\psi|^{\mathbf{f}}_{\tilde{\mathbf{f}}\mathbf{f}(\mathbf{z},\mathbf{x})} \multimap |\theta|^{\tilde{\mathbf{g}}\mathbf{f}}_{\mathbf{z},\mathbf{x}}.$$

Basta então tomar-se para $\tilde{\mathbf{f}}$ a função projecção, e para $\tilde{\mathbf{g}}$ a função identidade, e o resultado segue.

A interpretabilidade dos restantes princípios prova-se de forma análoga, pelo que apresentaremos aqui apenas mais um caso – o Princípio de Markov linear, M_l. Neste caso, a interpretação da premissa corresponde a

$$\begin{aligned}|\forall \mathbf{x}\ \varphi_{\mathsf{qf}} \multimap \psi_{\mathsf{qf}}|^{\mathbf{x}} &\equiv |\forall \mathbf{x}\ \varphi_{\mathsf{qf}}|_{\mathbf{x}} \multimap |\psi_{\mathsf{qf}}| \\ &\equiv \varphi_{\mathsf{qf}} \multimap \psi_{\mathsf{qf}},\end{aligned}$$

ao passo que a conclusão é interpretada como

$$\begin{aligned}|\exists \mathbf{x}\ (\varphi_{\mathsf{qf}} \multimap \psi_{\mathsf{qf}})|^{\mathbf{x}} &\equiv |\varphi_{\mathsf{qf}} \multimap \psi_{\mathsf{qf}}| \\ &\equiv |\varphi_{\mathsf{qf}}| \multimap |\psi_{\mathsf{qf}}| \\ &\equiv \varphi_{\mathsf{qf}} \multimap \psi_{\mathsf{qf}};\end{aligned}$$

de novo, o (único) realizador da premissa corresponde ao (único) realizador da conclusão; aqui podemos tomar simplesmente o realizador de M_l como a função identidade.

□

3.3 Estendendo a Interpretação Básica a ILL^ω: uma Interpretação Funcional Parametrizada

Nesta secção estendemos a interpretação funcional básica anteriormente apresentada a uma interpretação de ILL^ω (completa); resta assim definir a interpretação para fórmulas da forma $!\varphi$. Tal será feito de forma *parametrizada*; isto é, a interpretação será dada por uma fórmula que não especificaremos completamente, mas à qual exigiremos apenas que verifique certas condições. Porquê? Como já foi visto, IL^ω pode ser imersa em ILL^ω_r; por conseguinte, as interpretações funcionais que apresentámos no Capítulo 2 podem ser formuladas neste último contexto. Veremos, no próximo capítulo, que de facto as três interpretações funcionais mencionadas (quando estudadas no contexto da Lógica Linear) são coincidentes em ILL^ω pura (e são, de facto, a interpretação básica que exibimos na secção anterior), diferindo apenas na interpretação de !. Assim, o facto de definirmos a interpretação de $!\varphi$ parametrizadamente faz com que a realizabilidade modificada, a *Dialectica* de Gödel e a interpretação de Diller-Nahm correspondam apenas a diferentes instanciações da mesma interpretação funcional. Obteremos assim a desejada unificação.

Definição 3.6. (Interpretação Funcional Parametrizada.)
Estendemos a Definição 3.1 (da Interpretação Básica de ILL^ω) definindo a interpretação de $!\varphi$, com φ fórmula de ILL^ω cuja interpretação é $|\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{z}}$, do seguinte modo:

$$|!\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} :\equiv !(\forall \mathbf{z} \sqsubset \mathbf{y}\ |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{z}}),$$

onde a fórmula $\forall \mathbf{z} \sqsubset \mathbf{a}\ \psi$ é uma *meta–construção* tal que existem termos $\eta(\cdot)$, $(\cdot) \boxtimes (\cdot)$ e $(\cdot) \circ (\cdot)$ que satisfazem as seguintes condições:

(C1) $!(\forall \mathbf{z} \sqsubset \eta(\mathbf{x})\ \psi[\mathbf{z}]) \multimap \psi[\mathbf{x}]$;

(C2) $!(\forall \mathbf{z} \sqsubset (\mathbf{z_0} \boxtimes \mathbf{z_1})\ \psi[\mathbf{z}]) \multimap (!(\forall \mathbf{z} \sqsubset \mathbf{z}_0\ \psi[\mathbf{z}]) \otimes !(\forall \mathbf{z} \sqsubset \mathbf{z}_1\ \psi[\mathbf{z}]))$;

(C3) $!(\forall \mathbf{z} \sqsubset (\mathbf{f} \circ \mathbf{x})\ \psi[\mathbf{z}]) \multimap !(\forall \mathbf{w} \sqsubset \mathbf{x}\ !(\forall \mathbf{z} \sqsubset \mathbf{fw}\ \psi[\mathbf{z}]))$.

Teorema 3.7. *(Teorema da Correcção.)*

A interpretação definida em 3.6 (onde, em 3.6, se assumem as condições (C1), (C2) *e* (C3)*) é uma interpretação funcional correcta de* ILL^ω.

Demonstração.

A demonstração far-se-á por indução no comprimento da derivação; tendo em conta o Teorema 3.2, os únicos casos que nos resta discutir são os que envolvem o conectivo ! – a saber, as regras de enfraquecimento, contracção, !L e !R.

- Enfraquecimento: Suponha-se, como hipótese de indução, que existem termos γ e $\mathbf{b}$ tais que $|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma} \vdash |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}$. Temos:

$$\dfrac{\dfrac{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma} \vdash |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma}, !(\forall \mathbf{z} \sqsubset \mathbf{a}\ |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{z}}) \vdash |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}\ \text{(enfraq.)}}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma}, |!\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}} \vdash |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}\ \text{(Definição 3.6)}$$

Acima, $\mathbf{a}$ são termos fechados arbitrários, de tipos apropriados (cuja existência está assegurada, visto que, como se sabe, todo o tipo é habitado por um termo fechado).

- Contracção: Assuma-se, como hipótese de indução, que existem termos $\gamma, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1$ e $\mathbf{b}$ tais que $|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma}, |!\varphi|^{\mathbf{x}_0}_{\mathbf{a}_0}, |!\varphi|^{\mathbf{x}_1}_{\mathbf{a}_1} \vdash |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}$; pretende-se então encontrar termos que testemunhem a conclusão $\Gamma, !\varphi \vdash \psi$. Tal pode ser feito do seguinte modo:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma}, |!\varphi|^{\mathbf{x}_0}_{\mathbf{a}_0}, |!\varphi|^{\mathbf{x}_1}_{\mathbf{a}_1} \vdash |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma}, |!\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}_0}, |!\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}_1} \vdash |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}\,[\tfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}_0}, \tfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}_1}]}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma}, !(\forall \mathbf{z} \sqsubset \mathbf{a}_0\ |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{z}}), !(\forall \mathbf{z} \sqsubset \mathbf{a}_1\ |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{z}}) \vdash |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}\,(\text{Definição 3.6})}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma}, !(\forall \mathbf{z} \sqsubset \mathbf{a}_0\ |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{z}}) \otimes !(\forall \mathbf{z} \sqsubset \mathbf{a}_1\ |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{z}}) \vdash |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}\,(\otimes \mathrm{L})}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma}, !(\forall \mathbf{z} \sqsubset \mathbf{a}_0 \boxtimes \mathbf{a}_1\ |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{z}} \vdash |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}\,(\mathrm{C2})}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma}, |!\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}_0 \boxtimes \mathbf{a}_1} \vdash |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}\,(\text{Definição 3.6})$$

- !L: O resultado sai da seguinte prova (onde a primeira linha corresponde à hipótese de indução):

$$\dfrac{\dfrac{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma}, |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}} \vdash |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma}, !(\forall \mathbf{z} \sqsubset \eta(\mathbf{a})\ |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}) \vdash |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}\,(\mathrm{C1})}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma}, |!\varphi|^{\mathbf{x}}_{\eta(\mathbf{a})} \vdash |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}\,(\text{Definição 3.6})$$

- !R: Por último, suponha-se que existem termos γ e $\mathbf{a}$ tais que $!\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma} \vdash |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}}$. Tem-se:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{!\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma[\mathbf{x}]} \vdash |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}}}{!(\forall \mathbf{w} \sqsubset \gamma[\mathbf{x}]\ |\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\mathbf{w}}) \vdash |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}}}\,(\text{Definição 3.6})}{!(\forall \mathbf{w} \sqsubset (\lambda \mathbf{x}.\gamma[\mathbf{x}])\mathbf{x}\ |\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\mathbf{w}}) \vdash |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}}}}{!\ \forall \mathbf{x} \sqsubset \mathbf{y}\ (!(\forall \mathbf{w} \sqsubset (\lambda \mathbf{x}.\gamma[\mathbf{x}])\mathbf{x}\ |\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\mathbf{w}})) \vdash !(\forall \mathbf{x} \sqsubset \mathbf{y}\ |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}})}}{!\ \forall \mathbf{w} \sqsubset (\lambda \mathbf{x}.\gamma[\mathbf{x}]) \circ \mathbf{y}\ |\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\mathbf{w}} \vdash !(\ \forall \mathbf{x} \sqsubset \mathbf{y}\ |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}})}\,(\mathrm{C3})}{|!\Gamma|^{\mathbf{u}}_{(\lambda \mathbf{x}.\gamma[\mathbf{x}]) \circ \mathbf{y}} \vdash |!\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}}}\,(\text{Definição 3.6})$$

Fica assim concluída a demonstração.

$\square$

É importante notar-se que estamos a construir a fórmula $\forall \mathbf{z} \sqsubset \mathbf{a}\ \varphi$ no sistema verificador $\mathsf{ILL}^{\omega}_{b}$, e não no sistema interpretado ILL^{ω}. Tal ser-nos-á muito útil, uma vez que quando, no próximo Capítulo, apresentarmos várias instanciações desta fórmula, precisaremos em alguns casos de adicionar axiomas ao nosso sistema; se $\forall \mathbf{z} \sqsubset \mathbf{a}\ \varphi$ fosse parte de ILL^{ω}, tais axiomas teriam também que ser interpretados. Contudo, visto que $\forall \mathbf{z} \sqsubset \mathbf{a}\ \varphi$ é parte apenas do sistema de verificação, não será necessário interpretar os axiomas que acrescentaremos.

CAPÍTULO 4

Três Interpretações Funcionais como Instanciações de uma mesma Interpretação

4.1 Três Possíveis Interpretações para !

Neste capítulo, apresentaremos três instanciações de $\forall \mathbf{z} \sqsubset \mathbf{a}\ \varphi$ que, como veremos satisfazem as condições (C1), (C2) e (C3) e que, portanto, são interpretações funcionais *correctas*. De seguida, veremos que cada uma destas instanciações corresponde, no contexto da Lógica Intuicionista, a uma das interpretações funcionais que começámos por apresentar no Capítulo 2. Assim, reencontramos a realizabilidade modificada, a interpretação funcional *Dialectica* de Gödel e a interpretação funcional de Diller–Nahm, desta vez como diferentes instanciações de uma mesma interpretação funcional.

No que se segue, sempre que nos referimos à interpretação de uma fórmula de ILL^ω sem ! estaremos a referir-nos à interpretação básica apresentada na Definição 3.1.

Proposição 4.1. *Seja φ uma fórmula de ILL^ω. Defina-se a interpretação $|!\varphi|^{\mathbf{x}}$ de $!\varphi$ do seguinte modo:*

$$|!\varphi|^{\mathbf{x}} :\equiv !(\forall \mathbf{y}\ |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}).$$

A interpretação assim obtida é uma interpretação correcta de $!\varphi$.

Demonstração. A interpretação de $!\varphi$ aqui considerada corresponde a definir $\forall \mathbf{z} \sqsubset \mathbf{a}\ \varphi :\equiv \forall \mathbf{z}\ \varphi$. É então imediato constatar que as cláusulas (C1), (C2) e (C3) se tornam, neste caso, nas seguintes:

(C1) $!(\forall \mathbf{z}\ \varphi[\mathbf{z}]) \multimap \varphi[\mathbf{x}]$;

(C2) $!(\forall \mathbf{z}\ \varphi[\mathbf{z}]) \multimap [!(\forall \mathbf{z}\ \varphi[\mathbf{z}]) \otimes !(\forall \mathbf{z}\ \varphi[\mathbf{z}])]$;

(C3) $!(\forall \mathbf{z}\ \varphi[\mathbf{z}]) \multimap !(\forall \mathbf{y}\ !(\forall \mathbf{z}\ \varphi[\mathbf{z}]))$.

É um exercício simples ver que as três condições acima são deriváveis em ILL_b^ω. Com efeito, (C1) sai do seguinte:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi[\mathbf{x}] \vdash \varphi[\mathbf{x}]}{\forall \mathbf{z}\ \varphi[\mathbf{z}] \vdash \varphi[\mathbf{x}]}}{!\forall \mathbf{z}\ \varphi[\mathbf{z}] \vdash \varphi[\mathbf{x}]}$$

Para demonstrar (C2) basta vermos que, em ILL_b^ω, se tem $\vdash\ !\varphi \multimap (!\varphi \otimes !\varphi)$. E, de facto, tem-se:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{!\varphi \vdash\ !\varphi \qquad !\varphi \vdash\ !\varphi}{!\varphi, !\varphi \vdash !\varphi \otimes !\varphi}\ (\otimes \mathrm{R})}{!\varphi \vdash !\varphi \otimes !\varphi}\ (\mathrm{cont})}{\vdash !\varphi \multimap (!\varphi \otimes !\varphi)}\ (\multimap \mathrm{R})$$

Finalmente, a seguinte dedução prova (C3):

$$\dfrac{\dfrac{!(\forall \mathbf{z}\ \varphi[\mathbf{z}]) \vdash !(\forall \mathbf{z}\ \varphi[\mathbf{z}])}{!(\forall \mathbf{z}\ \varphi[\mathbf{z}]) \vdash \forall \mathbf{y}\ !(\forall \mathbf{z}\ \varphi[\mathbf{z}])}\ (\forall \mathrm{R})}{!(\forall \mathbf{z}\ \varphi[\mathbf{z}]) \vdash !(\forall \mathbf{y}\ !(\forall \mathbf{z}\ \varphi[\mathbf{z}]))}\ (!\mathrm{R})$$

Visto que as condições (C1), (C2) e (C3) são verificadas, o Teorema 3.7 garante-nos a correcção desta interpretação.

□

Proposição 4.2. *Suponha-se que ao sistema* ILL_b^ω *adicionamos o seguinte axioma–esquema:*

$$\vdash\ !\varphi \oplus !(\varphi \multimap 0),$$

que exprime a decidibilidade de toda a fórmula φ *livre de quantificadores. Assumamos, além disso, que temos definições por casos sobre fórmulas* φ *livres de quantificadores na linguagem dos termos de* ILL_b^ω*; isto é, temos*

$$\mathbf{s} \boxtimes \mathbf{t} := \begin{cases} \mathbf{s} & \textit{se}\ \ !(\varphi \multimap 0); \\ \mathbf{t} & \textit{se}\ \ !\varphi, \end{cases}$$

com as regras

$$\dfrac{\Gamma \vdash \psi[\mathbf{s} \boxtimes \mathbf{t}]}{\Gamma, !\varphi \vdash \psi[\mathbf{t}]}\ (\boxtimes_0) \quad \textit{e} \quad \dfrac{\Gamma \vdash \psi[\mathbf{s} \boxtimes \mathbf{t}]}{\Gamma, !(\varphi \multimap 0) \vdash \psi[\mathbf{s}]}\ (\boxtimes_1) \quad .$$

Dada φ fórmula neste novo sistema, defina-se a interpretação $|!\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}$ de $!\varphi$ do seguinte modo:

$$|!\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} :\equiv !|\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}.$$

A interpretação assim obtida é uma interpretação correcta de $!\varphi$.

Demonstração. A interpretação aqui considerada corresponde a definir a fórmula $\forall \mathbf{z} \sqsubset \mathbf{a}\ \varphi$ como sendo, simplesmente, $\varphi[\mathbf{a}/\mathbf{z}]$. É então necessário escolhermos termos η, $\boxtimes$ e $\circ$ de tal modo que, para esses termos, as condições correspondentes (para esta interpretação) a (C1), (C2) e (C3) sejam deriváveis no sistema (estendido) aqui definido. Dada uma fórmula $\varphi[\mathbf{z}]$, definimos $\eta(\cdot)$ como a identidade (isto é, dado termo $\mathbf{t}, \eta(\mathbf{t}) \equiv \mathbf{t}$); se $\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1$ forem termos, definimos $\mathbf{z}_0 \boxtimes \mathbf{z}_1$ da seguinte forma:

$$\mathbf{z}_0 \boxtimes \mathbf{z}_1 := \begin{cases} \mathbf{z}_0 & \text{se } !(\varphi[\mathbf{z}_0] \multimap 0) \\ \mathbf{z}_1 & \text{se } !\varphi[\mathbf{z}_0]. \end{cases}$$

Por último, definimos $\mathbf{f} \circ \mathbf{y}$ como $\mathbf{fy}$. Deste modo, (C1), (C2) e (C3) correspondem, respectivamente, a:

(C1) $!(\varphi[\eta(\mathbf{x})]) \multimap \varphi[\mathbf{x}]$;

(C2) $!(\varphi[\mathbf{z}_0 \boxtimes \mathbf{z}_1]) \multimap !\varphi[\mathbf{z}_0] \otimes !\varphi[\mathbf{z}_1]$;

(C3) $!(\varphi[\mathbf{f} \circ \mathbf{x}]) \multimap !!\varphi[\mathbf{fx}]$.

Resta então verificar a derivabilidade destas condições. Ora, (C1) é trivial, tendo em conta que $\eta(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Para (C2), necessitaremos dos dois seguintes resultados auxilares:

1. $!\varphi[\mathbf{z}_0], !\varphi[\mathbf{z}_0 \boxtimes \mathbf{z}_1] \vdash !\varphi[\mathbf{z}_0] \otimes !\varphi[\mathbf{z}_1]$;

2. $!(\varphi[\mathbf{z}_0] \multimap 0), !\varphi[\mathbf{z}_0 \boxtimes \mathbf{z}_1] \vdash 0$.

A sua demonstração é, contudo, bastante simples: para 1. tem-se o seguinte:

$$\dfrac{!\varphi[\mathbf{z}_0] \vdash \varphi[\mathbf{z}_0] \qquad \dfrac{!\varphi[\mathbf{z}_0 \boxtimes \mathbf{z}_1] \vdash !\varphi[\mathbf{z}_0 \boxtimes \mathbf{z}_1]}{!\varphi[\mathbf{z}_0], !\varphi[\mathbf{z}_0 \boxtimes \mathbf{z}_1] \vdash !\varphi[\mathbf{z}_1]}\,(\boxtimes_1)}{\dfrac{!\varphi[\mathbf{z}_0], !\varphi[\mathbf{z}_0], !\varphi[\mathbf{z}_0 \boxtimes \mathbf{z}_1] \vdash !\varphi[\mathbf{z}_0] \otimes !\varphi[\mathbf{z}_1]}{!\varphi[\mathbf{z}_0], !\varphi[\mathbf{z}_0 \boxtimes \mathbf{z}_1] \vdash !\varphi[\mathbf{z}_0] \otimes !\varphi[\mathbf{z}_1]}\,(\text{cont})}\,(\otimes\text{R})$$

e, para 2., considere-se a seguinte dedução:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi[\mathbf{z}_0]\multimap 0 \vdash \varphi[\mathbf{z}_0]\multimap 0}{\varphi[\mathbf{z}_0]\multimap 0, \varphi[\mathbf{z}_0] \vdash 0}\,\text{(Lema 2.2.7)}}{!(\varphi[\mathbf{z}_0]\multimap 0), !\varphi[\mathbf{z}_0] \vdash 0} \qquad \dfrac{!\varphi[\mathbf{z}_0 \boxtimes \mathbf{z}_1] \vdash !\varphi[\mathbf{z}_0 \boxtimes \mathbf{z}_1]}{!(\varphi[\mathbf{z}_0]\multimap 0), !\varphi[\mathbf{z}_0 \boxtimes \mathbf{z}_1] \vdash !\varphi[\mathbf{z}_0]}\,(\otimes_0)}{!(\varphi[\mathbf{z}_0]\multimap 0), !(\varphi[\mathbf{z}_0]\multimap 0), !\varphi[\mathbf{z}_0 \boxtimes \mathbf{z}_1] \vdash 0}\,\text{(corte)}}{!(\varphi[\mathbf{z}_0]\multimap 0), !\varphi[\mathbf{z}_0 \boxtimes \mathbf{z}_1] \vdash 0}\,\text{(cont)}$$

Munidos destes dois resultados e do axioma–esquema anteriormente enunciado, pode então deduzir-se (C2); por uma questão de conveniência apresentaremos a dedução em dois passos, em que o primeiro corresponde à seguinte prova:

$$\dfrac{\overset{(1.)}{!\varphi[\mathbf{z}_0], !\varphi[\mathbf{z}_0 \boxtimes \mathbf{z}_1] \vdash !\varphi[\mathbf{z}_0] \otimes !\varphi[\mathbf{z}_1]} \qquad \dfrac{\overset{(2.)}{!(\varphi[\mathbf{z}_0]\multimap 0), !\varphi[\mathbf{z}_0 \boxtimes \mathbf{z}_1] \vdash 0} \qquad 0 \vdash !\varphi[\mathbf{z}_0] \otimes !\varphi[\mathbf{z}_1]}{!(\varphi[\mathbf{z}_0]\multimap 0), !\varphi[\mathbf{z}_0 \boxtimes \mathbf{z}_1] \vdash !\varphi[\mathbf{z}_0] \otimes !\varphi[\mathbf{z}_1]}\,\text{(corte)}}{!\varphi[\mathbf{z}_0] \oplus !(\varphi[\mathbf{z}_0]\multimap 0), !\varphi[\mathbf{z}_0 \boxtimes \mathbf{z}_1] \vdash !\varphi[\mathbf{z}_0] \otimes !\varphi[\mathbf{z}_1]}\,(\oplus\text{L})$$

Para concluirmos a prova basta agora utilizarmos a dedução acima e uma instanciação do referido axioma–esquema, do seguinte modo:

$$\dfrac{\vdash !\varphi[\mathbf{z}_0] \oplus !(\varphi[\mathbf{z}_0]\multimap 0) \qquad !\varphi[\mathbf{z}_0] \oplus !(\varphi[\mathbf{z}_0]\multimap 0), !\varphi[\mathbf{z}_0 \boxtimes \mathbf{z}_1] \vdash !\varphi[\mathbf{z}_0] \otimes !\varphi[\mathbf{z}_1]}{!\varphi[\mathbf{z}_0 \boxtimes \mathbf{z}_1] \vdash !\varphi[\mathbf{z}_0] \otimes !\varphi[\mathbf{z}_1]}\,\text{(corte)}$$

Fica assim concluída a dedução de (C2).

Finalmente, para a cláusula (C3) basta considerar a seguinte (simples) dedução:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{!\varphi[\mathbf{f} \circ \mathbf{x}] \vdash !\varphi[\mathbf{f} \circ \mathbf{x}]}{!\varphi[\mathbf{f} \circ \mathbf{x}] \vdash !\varphi[\mathbf{f}\mathbf{x}]}}{!\varphi[\mathbf{f} \circ \mathbf{x}] \vdash !!\varphi[\mathbf{f}\mathbf{x}]}\,(!\text{R})}{\vdash !\varphi[\mathbf{f} \circ \mathbf{x}] \multimap !!\varphi[\mathbf{f}\mathbf{x}]}$$

Tendo assim sido demonstrada a dedutibilidade de (C1), (C2) e (C3), o Teorema 3.7 garante que a presente interpretação é correcta.

$\square$

Proposição 4.3. *Suponha-se agora que, para cada tipo finito σ da linguagem de ILL_b^ω, adicionamos (a essa mesma linguagem) um novo tipo finito σ^*. Pretende-se que um elemento de tipo σ^* represente um conjunto finito de elementos de tipo σ; para tal, incluímos ainda, na linguagem estendida, um símbolo relacional $\in$ entre termos de tipo σ e termos de tipo σ^*, juntamente com axiomas que garantam que se tem $!(x \in y)$ se, e somente se, x é um elemento do conjunto y.*

Suponha-se ainda, para quaisquer tipos finitos σ e ρ, a existência de três novas constantes: $\eta : \sigma \to \sigma^*$, $\boxtimes : \sigma^* \to \sigma^* \to \sigma^*$ e, por último, $\circ : \sigma^* \to (\sigma \to \rho^*) \to \rho^*$. Tais constantes devem ser encaradas como termos tais que $\eta(s)$ representa o conjunto singular cujo único elemento é o termo s^σ, $s \boxtimes t$ corresponde à união dos dois conjuntos finitos s e t, e $f \circ s$ é o conjunto constituído pela união de todos os conjuntos fx com $x \in s$; suponhamos então que o nosso sistema se encontra munido de axiomas que captem a descrita interpretação destas novas constantes.[1]

Represente-se a fórmula $\forall \mathbf{x}\ (!(\mathbf{x} \in \mathbf{t}) \multimap \varphi)$, abreviadamente, por $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{t}\ \varphi$.

Dada φ fórmula desta nova linguagem, defina-se a interpretação $|!\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}}$ de $!\varphi$ do seguinte modo:

$$|!\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}} :\equiv !(\forall \mathbf{y} \in \mathbf{a}\ |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}).$$

A interpretação assim obtida é uma interpretação correcta de $!\varphi$.

Demonstração. A interpretação de $!\varphi$ acima descrita corresponde à escolha $\forall \mathbf{z} \sqsubset \mathbf{a}\ \varphi :\equiv \forall \mathbf{z}\ (!(\mathbf{z} \in \mathbf{a}) \multimap \varphi[\mathbf{z}])$ – isto é, com a notação descrita acima, a $\forall \mathbf{z} \in \mathbf{a}\ \varphi$. É então fácil verificar que as cláusulas (C1), (C2) e (C3) se convertem nas seguintes:

(C1) $!(\forall \mathbf{z} \in \eta(\mathbf{x})\ \varphi[\mathbf{z}]) \multimap \varphi[\mathbf{x}]$;

(C2) $!(\forall \mathbf{z} \in \mathbf{z}_0 \boxtimes \mathbf{z}_1\ \varphi[\mathbf{z}]) \multimap !(\forall \mathbf{z} \in \mathbf{z}_0\ \varphi[\mathbf{z}]) \otimes !(\forall \mathbf{z} \in \mathbf{z}_1\ \varphi[\mathbf{z}])$;

(C3) $!(\forall \mathbf{z} \in \mathbf{f} \circ \mathbf{x}\ \varphi[\mathbf{z}]) \multimap !(\forall \mathbf{w} \in \mathbf{x} !\forall \mathbf{z} \in \mathbf{fw}\ \varphi[\mathbf{z}])$.

É uma verificação simples constatar-se que estas três cláusulas são demonstráveis na extensão de ILL^ω_b acima apresentada, tendo em conta a definição das novas constantes η, $\boxtimes$ e $\circ$. Assim, mais uma vez pelo Teorema 3.7, concluímos a correcção desta interpretação.

$\square$

A Definição 2.1 – onde apresentamos as traduções $(\cdot)^*$ e $(\cdot)^\circ$ –, conjuntamente com a proposição que afirma que se uma fórmula é demonstrável em IL^ω, então as suas traduções são demonstráveis no sistema restrito ILL^ω_r, mostram que este sistema restrito da lógica linear é suficiente para analisar IL^ω. Acontece que, no contexto de ILL^ω_r, pode considerar-se a seguinte interpretação funcional, mais simples que a anteriormente apresentada, e ainda correcta.

Definição 4.4. (Interpretação Funcional de ILL^ω_r Simplificada.)

Associe-se a cada fórmula φ do sistema restrito ILL^ω_r uma fórmula $|\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}$ de ILL^ω_b, onde $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ são duas sequências finitas de variáveis que não ocorrem em φ, indutivamente, do seguinte modo:

[1] Optámos aqui por não apresentar explicitamente tais axiomas, tendo em conta que uma breve reflexão convencerá o leitor de que é possível fazê-lo, e que uma tal formalização complicaria desnecessariamente o que se segue.

- Se φ é fórmula atómica, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são a sequência vazia e $|\varphi| = \varphi$;

Suponham-se já definidas as intepretações $|\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}$ e $|\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}}$ de φ e ψ, respectivamente. Define-se:

- $|\varphi \otimes \psi|^{\mathbf{x},\mathbf{v}}_{\mathbf{y},\mathbf{w}} :\equiv |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \otimes |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}}$;
- $|\varphi \& \psi|^{\mathbf{x},\mathbf{v}}_{\mathbf{y},\mathbf{w}} :\equiv |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \& |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}}$;
- $|\varphi \oplus \psi|^{\mathbf{x},\mathbf{v},z}_{\mathbf{y},\mathbf{w}} :\equiv |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \diamond_z |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}}$;
- $|\varphi \multimap \psi|^{\mathbf{f},\mathbf{g}}_{\mathbf{x},\mathbf{w}} :\equiv |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{fxw}} \multimap |\psi|^{\mathbf{gx}}_{\mathbf{w}}$;
- $|\forall z\ \varphi(z)|^{\mathbf{f}}_{\mathbf{y},z} :\equiv |\varphi(z)|^{\mathbf{f}z}_{\mathbf{y}}$;
- $|\exists z\ \varphi(z)|^{\mathbf{x},z}_{\mathbf{y}} :\equiv |\varphi(z)|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}$;
- $|!\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} :\equiv !(\forall \mathbf{z} \sqsubset \mathbf{y}\ |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{z}})$,

onde, no último ponto, se assume que as condições (C1), (C2) e (C3) são satisfeitas.

Lema 4.5. *Sejam φ e ψ fórmulas arbitrárias de $\mathsf{ILL}^{\omega}_{b}$. Tem-se que:*

1. $!\varphi \otimes !\psi \multimap !\varphi$;
2. $!\varphi \otimes !\psi \multimap !\psi$.

Demonstração.

Para 1. basta considerar-se a seguinte dedução:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{!\varphi \vdash !\varphi}{!\varphi, !\psi \vdash !\varphi}\ (\text{enfraq})}{!\varphi \otimes !\psi \vdash !\varphi}}{\vdash !\varphi \otimes !\psi \multimap !\varphi}$$

A demonstração de 2. é análoga.

□

Teorema 4.6. *(Teorema da Correcção da Interpretação de $\mathsf{ILL}^{\omega}_{r}$.)*

A interpretação funcional apresentada na definição anterior é correcta.

Demonstração. Tendo em conta as demonstrações dos Teoremas da Correcção para a Interpretação Básica e para a Interpretação Parametrizada nada há a demonstrar nos casos correspondentes às fórmulas atómicas, aos conectivos $\otimes, \oplus, \multimap$ e ! e a ambos os quantificadores. Analisemos então as regras do conectivo &, tendo presente que nos encontramos no sistema restrito $\mathsf{ILL}^{\omega}_{r}$, onde a regra (&R) só é aplicável quando o antecedente do sequente é da forma $!\Gamma$.

- &L: Como hipótese de indução temos que existem termos γ, $\mathbf{a}$ e $\mathbf{c}$ tais que $|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma}, |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}} \vdash |\theta|^{\mathbf{c}}_{\mathbf{w}}$. Assim,

$$\dfrac{\dfrac{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma}, |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}} \vdash |\theta|^{\mathbf{c}}_{\mathbf{w}}}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma}, |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}} \mathbin{\&} |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}} \vdash |\theta|^{\mathbf{c}}_{\mathbf{w}}}\ (\&L)}{|\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma}, |\varphi \mathbin{\&} \psi|^{\mathbf{x},\mathbf{v}}_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \vdash |\theta|^{\mathbf{c}}_{\mathbf{w}}}$$

  onde, acima, utilizamos novamente o facto de todo o tipo ser habitado por um termo fechado para apresentar um tal termo $\mathbf{b}$. A outra regra para &L é análoga.

- &R : Suponha-se, como hipótese de indução, que existem termos $\gamma_0, \gamma_1, \mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ tais que $|!\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma_0} \vdash |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}}$ e $|!\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma_1} \vdash |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{y}}$. Para simplificar a notação, suponha-se ainda que Γ é constituído por uma única fórmula α; as expressões anteriores tornam-se então, respectivamente, $|\alpha|^{\mathbf{u}}_{\gamma_0} \vdash |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}}$ e $|!\alpha|^{\mathbf{u}}_{\gamma_1} \vdash |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{y}}$.

  Da condição (C2) e do Lema 4.5 é facilmente dedutível que:

$$\vdash !(\forall \mathbf{z} \sqsubset (\gamma_0 \boxtimes \gamma_1)\ |\alpha|^{\mathbf{u}}_{\gamma_0}) \multimap !(\forall \mathbf{z} \sqsubset \gamma_0\ |\alpha|^{\mathbf{u}}_{\gamma_0}) \qquad (*)$$

  e que

$$\vdash !(\forall \mathbf{z} \sqsubset (\gamma_0 \boxtimes \gamma_1)\ |\alpha|^{\mathbf{u}}_{\gamma_1}) \multimap !(\forall \mathbf{z} \sqsubset \gamma_1\ |\alpha|^{\mathbf{u}}_{\gamma_1}) \qquad (**)$$

  Assim, temos que

$$\dfrac{\dfrac{(*)}{!(\forall \mathbf{z} \sqsubset (\gamma_0 \boxtimes \gamma_1)\ |\alpha|^{\mathbf{u}}_{\mathbf{z}}) \vdash !(\forall \mathbf{z} \sqsubset \gamma_0\ |\alpha|^{\mathbf{u}}_{\mathbf{z}})} \quad \dfrac{|!\alpha|^{\mathbf{u}}_{\gamma_0} \vdash |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}}}{!(\forall \mathbf{z} \sqsubset \gamma_0\ |\alpha|^{\mathbf{u}}_{\mathbf{z}}) \vdash |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}}}}{!(\forall \mathbf{z} \sqsubset (\gamma_0 \boxtimes \gamma_1)\ |\alpha|^{\mathbf{u}}_{\mathbf{z}}) \vdash |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}}}\ (\text{corte})$$

  e, analogamente,

$$\dfrac{\dfrac{(**)}{!(\forall \mathbf{z} \sqsubset (\gamma_0 \boxtimes \gamma_1)\ |\alpha|^{\mathbf{u}}_{\mathbf{z}}) \vdash !(\forall \mathbf{z} \sqsubset \gamma_1\ |\alpha|^{\mathbf{u}}_{\mathbf{z}})} \quad \dfrac{|!\alpha|^{\mathbf{u}}_{\gamma_1} \vdash |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{y}}}{!(\forall \mathbf{z} \sqsubset \gamma_1\ |\alpha|^{\mathbf{u}}_{\mathbf{z}}) \vdash |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{y}}}}{!(\forall \mathbf{z} \sqsubset (\gamma_0 \boxtimes \gamma_1)\ |\alpha|^{\mathbf{u}}_{\mathbf{z}}) \vdash |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}\ (\text{corte})$$

  Sucede que as duas deduções anteriores são ainda válidas para o caso geral, em que o conjunto Γ pode ter um qualquer número finito de fórmulas. Com efeito, bastaria iterar o processo utilizado nas deduções, tantas vezes quanto necessário, e obter-se-ia o resultado no caso geral. Assim, pode de facto concluir-se o resultado para o caso geral. Vem então:

$$\dfrac{\dfrac{!(\forall \mathbf{z} \sqsubset (\gamma_0 \boxtimes \gamma_1)\ |\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\mathbf{z}}) \vdash |\varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} \qquad !(\forall \mathbf{z} \sqsubset (\gamma_0 \boxtimes \gamma_1)\ |\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\mathbf{z}}) \vdash |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}{!(\forall \mathbf{z} \sqsubset (\gamma_0 \boxtimes \gamma_1)\ |\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\mathbf{z}}) \vdash \varphi|^{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} \& |\psi|^{\mathbf{b}}_{\mathbf{w}}}\ (\&R)}{|!\Gamma|^{\mathbf{u}}_{\gamma_0 \boxtimes \gamma_1} \vdash |\varphi \& \psi|^{\mathbf{a},\mathbf{b}}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}}$$

o que conclui o pretendido.

Está então demonstrada a correcção desta interpretação.

□

Uma vez que, daqui em diante, estaremos essencialmente interessados em traduções da Lógica Intuicionista para a Lógica Linear Intuicionista, e tendo em conta que, como já argumentámos, basta para tal considerarmos o sistema restrito $\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}$, sempre que for mencionada a interpretação $|\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}$ de φ estaremos a referir-nos à interpretação parametrizada e simplificada da Definição 4.4.

A próxima etapa consistirá em verificar que as três instanciações que considerámos para a interpretação de fórmulas da forma $!\varphi$ originam interpretações de $\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}$ que corresponderão, através de traduções de IL^ω em $\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}$, à realizabilidade modificada, à *Dialectica* de Gödel, e à interpretação de Diller–Nahm. Contudo, para que se tenha uma correspondência exacta entre a interpretação em IL^ω e a interpretação em $\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}$ será necessário, para as interpretações de Gödel e de Diller–Nahm, usar uma tradução diferente de $(\cdot)^*$ e de $(\cdot)^\circ$ – de facto, uma simplificação destas –, que passaremos a descrever na secção seguinte.[2]

4.2 Uma Tradução Simplificada de $\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}$ em ILL^ω_b.

Definição 4.7. Defina-se a seguinte simplificação $(\cdot)^+$ da tradução $(\cdot)^*$, apresentada na Definição 2.1, onde as traduções de $\vee$ e $\exists$ já não necessitam da introdução de !:

$\varphi^+_{\mathsf{at}} :\equiv \varphi_{\mathsf{at}}, \qquad$ se $\varphi_{\mathsf{at}} \not\equiv \bot$;

$\bot^+ :\equiv 0$;

$(\varphi \wedge \psi)^+ :\equiv \varphi^+ \& \psi^+$;

$(\varphi \vee \psi)^+ :\equiv \varphi^+ \oplus \psi^+$;

$(\varphi \to \psi)^+ :\equiv !\varphi^+ \multimap \psi^+$;

$(\forall x\ \varphi)^+ :\equiv \forall x\ \varphi^+$;

$(\exists x\ \varphi)^+ :\equiv \exists x\ \varphi^+$.

[2] Esta simplificação necessita, como veremos, de dois princípios adicionais; demonstraremos, contudo, que são interpretáveis.

Definição 4.8. Representamos por $\mathrm{P}_{\oplus}$ e $\mathrm{P}_{\exists}$, respectivamente, os seguintes princípios:

$$\mathrm{P}_{\oplus} \ : !(\varphi \oplus \psi) \multimap !\varphi \oplus !\psi$$

$$\mathrm{P}_{\exists} \ : !(\exists z\ \varphi) \multimap \exists z\ !\varphi.$$

Lema 4.9. *As seguintes afirmações são demonstráveis em* $\mathsf{ILL}^{\omega}_{\mathsf{r}}$*:*

1. $!\varphi \oplus !\psi \multimap !(\varphi \oplus \psi)$*;*
2. $\exists z\ !\varphi \multimap !(\exists z\ \varphi)$*.*

Por conseguinte, os princípios $\mathrm{P}_{\oplus}$ *e* $\mathrm{P}_{\exists}$ *são de facto equivalências lineares.*

Demonstração. Basta considerar-se as seguintes deduções:

1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi}{!\varphi \vdash \varphi}}{!\varphi \vdash \varphi \oplus \psi}}{!\varphi \vdash !(\varphi \oplus \psi)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi \vdash \psi}{!\psi \vdash \psi}}{!\psi \vdash \varphi \oplus \psi}}{!\psi \vdash !(\varphi \oplus \psi)}}{!\varphi \oplus !\psi \vdash !(\varphi \oplus \psi)}}{\vdash !\varphi \oplus !\psi \multimap !(\varphi \oplus \psi)}$$

2.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi}{\varphi \vdash \exists z\ \varphi}}{!\varphi \vdash \exists z\ \varphi}}{!\varphi \vdash !(\exists z\ \varphi)}}{\exists z\ !\varphi \vdash !(\exists z\ \varphi)}}{\vdash \exists z\ !\varphi \multimap !(\exists z\ \varphi)}$$

□

Proposição 4.10. *Consideremos a tradução* $(\cdot)^{+}$*, apresentada na definição 4.7. Seja* φ *uma fórmula de* IL^{ω}*.*

Se φ *é demonstrável em* IL^{ω}*, então* φ^{+} *é demonstrável em* $\mathsf{ILL}^{\omega}_{\mathsf{r}} + \mathrm{P}_{\oplus} + \mathrm{P}_{\exists}$*.*

Demonstração. Seja φ uma fórmula arbitrária de $\mathsf{ILL}^{\omega}_{\mathsf{r}}$. Comecemos por demonstrar, por indução na complexidade de φ, que na presença dos princípios $P_{\oplus}$ e $P_{\exists}$, se tem a equivalência linear $!\varphi^{*} \multimapboth !\varphi^{+}$; tal demonstração necessitará de alguns princípios demonstrados no Lema 2.2.

Se φ é fórmula atómica diferente de $\bot$, então $!\varphi^{*} \equiv !\varphi \equiv !\varphi^{+}$, e nada há a demonstrar. Similarmente, se φ é $\bot$, temos que $!\bot^{*} \equiv !0 \equiv !\bot^{+}$.

Analisemos agora o caso correspondente a fórmulas do tipo $\varphi \wedge \psi$ Tem-se:

$$\begin{array}{lll} !(\varphi \wedge \psi)^{*} & \equiv !(\varphi^{*} \& \psi^{*}) & \\ & \multimapboth !\varphi^{*} \otimes !\psi^{*} & \text{(Lema 2.2.2)} \\ & \multimapboth !\varphi^{+} \otimes !\psi^{+} & \text{(por hipótese de indução)} \\ & \multimapboth !(\varphi^{+} \& \psi^{+}) & \text{(Lema 2.2.2)} \\ & \equiv !(\varphi \wedge \psi)^{+}. & \end{array}$$

Para fórmulas da forma $\varphi \vee \psi$, considere-se o seguinte:

$$\begin{array}{lll} !(\varphi \vee \psi)^* & \equiv !(!\varphi^* \oplus !\psi^*) & \\ & \multimap\!\!\circ\ !\varphi^* \oplus !\psi^* & \text{(Lema 2.2.3)} \\ & \multimap\!\!\circ\ !\varphi^+ \oplus !\psi^+ & \text{(por hipótese de indução)} \\ & \multimap\!\!\circ\ !(\varphi^+ \oplus \psi^+) & (\mathrm{P}_\oplus + \text{Lema 4.9.1}) \\ & \equiv\ !(\varphi \vee \psi)^+. & \end{array}$$

No caso de fórmulas da forma $\varphi \to \psi$, tem-se:

$$\begin{array}{lll} !(\varphi \to \psi)^* & \equiv\ !(!\varphi^* \multimap \psi^*) & \\ & \multimap\!\!\circ\ !(!\varphi^* \multimap !\psi^*) & \text{(Lema 2.2.4)} \\ & \multimap\!\!\circ\ !(!\varphi^+ \multimap !\psi^+) & \text{(por hipótese de indução)} \\ & \multimap\!\!\circ\ !(!\varphi^+ \multimap \psi^+) & \text{(Lema 2.2.4)} \\ & \equiv\ !(\varphi \to \psi)^+. & \end{array}$$

Por último, os casos dos quantificadores. Se a fórmula for da forma $\forall x\ \varphi$, temos que

$$\begin{array}{lll} !(\forall x\ \varphi)^* & \equiv\ !(\forall x\ \varphi^*) & \\ & \multimap\!\!\circ\ !(\forall x\ !\varphi^*) & \text{(Lema 2.2.5)} \\ & \multimap\!\!\circ\ !(\forall x\ !\varphi^+) & \text{(por hipótese de indução)} \\ & \multimap\!\!\circ\ !(\forall x\ \varphi^+) & \text{(Lema 2.2.5)} \\ & \equiv\ !(\forall x\ \varphi)^+; & \end{array}$$

ao passo que, no caso da forma $\exists x\ \varphi$, se tem:

$$\begin{array}{lll} !(\exists x\ \varphi)^* & \equiv\ !(\exists x\ !\varphi^*) & \\ & \multimap\!\!\circ\ \exists x\ !\varphi^* & \text{(Lema 2.2.6)} \\ & \multimap\!\!\circ\ \exists x\ !\varphi^+ & \text{(por hipótese de indução)} \\ & \multimap\!\!\circ\ !(\exists x\ \varphi^+) & (\mathrm{P}_\exists + \text{Lema 4.9.2}) \\ & \equiv\ !(\exists x\ \varphi)^+. & \end{array}$$

Demonstrámos assim que, para toda a fórmula φ, $!\varphi^* \multimap\!\!\circ !\varphi^+$. Ora, a Proposição 2.3 garante-nos que se φ é dedutível em IL^ω, então φ^* é dedutível em $\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}$. Por conseguinte, também $!\varphi^*$ é dedutível em $\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r}$, e, portanto, também o é em $\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r} + \mathrm{P}_\oplus + \mathrm{P}_\exists$. Este facto, aliado à equivalência linear acima demonstrada, garante então que $\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r} + \mathrm{P}_\oplus + \mathrm{P}_\exists \vdash !\varphi^+$. Daqui se conclui, em particular, que $\mathsf{ILL}^\omega_\mathsf{r} + \mathrm{P}_\oplus + \mathrm{P}_\exists \vdash \varphi^+$. [3]

□

[3] Este passo é, efectivamente, muito simples: basta usar-se o facto de que $!\varphi \vdash \varphi$, e corte.

Proposição 4.11. *Os princípios* $\mathrm{P}_\oplus$ *e* $\mathrm{P}_\exists$ *são interpretáveis.*

Demonstração. Para demonstrarmos a interpretabilidade de $\mathrm{P}_\oplus$ e $\mathrm{P}_\exists$ é suficiente ver-se que a interpretação das premissas implica a interpretação da conclusão, visto que, então, as funções identidade e projecção poderão ser tomadas como realizadores das implicações.

A análise do caso de $P_\oplus$ necessitará ainda de um facto adicional: é possível demonstrar, na extensão de ILL^ω_b com qualquer uma das três escolhas para $\forall \mathbf{z} \sqsubset \mathbf{a}\ \varphi$ feitas anteriormente, que, dadas quaisquer fórmulas α e β, se tem

1. $\forall \mathbf{x} \sqsubset \mathbf{a}\ \forall \mathbf{y} \sqsubset \mathbf{b}\ (\alpha(\mathbf{x})\ \&\ \beta(\mathbf{y})) \multimap ((\forall \mathbf{x} \sqsubset\ \mathbf{a}\ \alpha(\mathbf{x}))\ \&\ (\forall \mathbf{y} \sqsubset \mathbf{b}\ \beta(\mathbf{y})))$ e
2. $\forall \mathbf{y} \sqsubset \mathbf{b}\ (\alpha \multimap \beta(\mathbf{y})) \multimap (\alpha \multimap \forall \mathbf{y} \sqsubset \mathbf{b}\ \beta(\mathbf{y}))$,

onde $\mathbf{x}$ não ocorre em β e $\mathbf{y}$ não ocorre em α.

Utilizando a observação acima, temos então:

$$\begin{array}{lll}
|!(\varphi \oplus \psi)|^{\mathbf{x},\mathbf{v},z}_{\mathbf{a},\mathbf{b}} & \equiv !(\forall \mathbf{y} \sqsubset \mathbf{a}\ \forall \mathbf{w} \sqsubset \mathbf{b}\ |\varphi \oplus \psi|^{\mathbf{x},\mathbf{v},z}_{\mathbf{y},\mathbf{w}}) & \\
 & \equiv !(\forall \mathbf{y} \sqsubset \mathbf{a}\ \forall \mathbf{w} \sqsubset \mathbf{b}\ (|\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \diamond_z |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}})) & \\
 & \equiv !(\forall \mathbf{y} \sqsubset \mathbf{a}\ \forall \mathbf{w} \sqsubset \mathbf{b}\ ((z = \mathrm{T} \multimap |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}})\ \&\ (z = \mathrm{F} \multimap |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}})) & \\
 & \multimap !(\forall \mathbf{y} \sqsubset \mathbf{a}\ (z = \mathrm{T} \multimap |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}})\ \&\ \forall \mathbf{w} \sqsubset \mathbf{b}\ (z = \mathrm{F} \multimap |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}})) & \\
 & \multimap !((z = \mathrm{T} \multimap \forall \mathbf{y} \sqsubset \mathbf{a}\ |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}})\ \&\ (z = \mathrm{F} \multimap \forall \mathbf{w} \sqsubset \mathbf{b}\ |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}})) & \\
 & \multimap !(\forall \mathbf{y} \sqsubset \mathbf{a}\ |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \diamond_z \forall \mathbf{w} \sqsubset \mathbf{b}\ |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}}) & \\
 & \multimap !(\forall \mathbf{y} \sqsubset \mathbf{a}\ |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}) \diamond_z !(\forall \mathbf{w} \sqsubset \mathbf{b}\ |\psi|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}}) & (*) \\
 & \equiv\ |!\varphi \oplus !\psi|^{\mathbf{x},\mathbf{v},z}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}; &
\end{array}$$

acima, em (*), utilizou-se o facto de, dadas quaisquer fórmulas α e β, se ter $!(\alpha \diamond_z \beta) \multimap !\alpha \diamond_z !\beta$, demonstrável através da seguinte dedução:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \vdash \alpha}{\alpha \diamond_\mathrm{T} \beta \vdash \alpha}}{!(\alpha \diamond_\mathrm{T} \beta) \vdash \alpha}}{!(\alpha \diamond_\mathrm{T} \beta) \vdash !\alpha}}{!(\alpha \diamond_\mathrm{T} \beta) \vdash !\alpha \diamond_\mathrm{T} !\beta} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\beta \vdash \beta}{\alpha \diamond_\mathrm{F} \beta \vdash \beta}}{!(\alpha \diamond_\mathrm{F} \beta) \vdash \beta}}{!(\alpha \diamond_\mathrm{F} \beta) \vdash !\beta}}{!(\alpha \diamond_\mathrm{F} \beta) \vdash !\alpha \diamond_\mathrm{F} !\beta}}{\dfrac{!(\alpha \diamond_z \beta) \vdash !\alpha \diamond_\mathrm{z} !\beta}{\vdash !(\alpha \diamond_z \beta) \multimap (!\alpha \diamond_\mathrm{z} !\beta)}}$$

O princípio $P_\exists$ é ainda mais simples; com efeito, temos que:

$$\begin{array}{ll}
|(!\exists z\ \varphi)|^{\mathbf{x},z}_{\mathbf{a}} & \equiv !(\forall \mathbf{y} \sqsubset \mathbf{a}\ |\exists z\ \varphi|^{\mathbf{x},z}_{\mathbf{y}}) \\
 & \equiv !(\forall \mathbf{y} \sqsubset \mathbf{a}\ |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}) \\
 & \equiv\ |!\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{a}} \\
 & \equiv\ |\exists z\ !\varphi|^{\mathbf{x},z}_{\mathbf{a}}
\end{array}$$

Isto conclui a demonstração.

□

Atendendo à proposição anterior, é efectivamente lícito utilizar-se os princípios $\mathrm{P}_{\oplus}$ e $\mathrm{P}_{\exists}$ para simplificar a imersão da Lógica Intuicionista nesta extensão da Lógica Linear Intuicionista, uma vez que a nossa interpretação desta última interpreta os referidos princípios e, portanto, no final, encontramo-nos-emos ainda no contexto de ILL_b^ω, sem $\mathrm{P}_{\oplus}$ e sem $\mathrm{P}_{\exists}$.

De seguida, mostramos como cada uma das três instanciações da interpretação parametrizada apresentadas nas Proposições 4.1, 4.2 e 4.3 correspondem, respectivamente, à Realizabilidade Modificada, à Interpretação Funcional de Gödel e à Interpretação Funcional de Diller-Nahm.

4.3 A Realizabilidade Modificada.

Começaremos por ver que a primeira instanciação da fórmula (parametrizada) $\forall \mathbf{z} \sqsubset \mathbf{a}\ \varphi$ – a saber, $\forall \mathbf{z}\ \varphi$ – corresponderá à Realizabilidade Modificada de G. Kreisel. Ao longo desta secção estaremos, portanto, a trabalhar exclusivamente com esta instanciação de $!(\forall \mathbf{z} \sqsubset \mathbf{a}\ \varphi)$.

Necessitaremos, em primeiro lugar, do seguinte lema:

Lema 4.12. *Seja φ uma fórmula de IL^ω.*

1. *Na interpretação da tradução $(\cdot)^\circ$ de φ, $|\varphi^\circ|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}$, $\mathbf{y}$ corresponde à sequência vazia. Assim, representaremos a fórmula interpretada por $|\varphi^\circ|^{\mathbf{x}}$.*

2. *$|\varphi^\circ|^{\mathbf{x}} \multimap\!\!\circ\ !|\varphi^\circ|^{\mathbf{x}}$.*

Demonstração. A demonstração de ambas as alíneas far-se-á por indução na complexidade de φ.

1. Se φ é fórmula atómica e $\varphi \not\equiv \perp$, $|\varphi^\circ| \equiv |!\varphi| \equiv !|\varphi| \equiv !\varphi$, uma vez que a interpretação destas fórmulas atómicas corresponde à própria fórmula e não necessita de realizadores. Se $\varphi \equiv \perp$, então $|\varphi^\circ| \equiv |0| \equiv 0$.

   Analisemos agora o caso $\varphi \wedge \psi$. Por hipótese de indução, temos que a sequência de variáveis correspondente a Abelardo (*desafios*) nas interpretações de φ° e ψ° é vazia; isto é, que se tem $|\varphi^\circ|^{\mathbf{x}}$ e $|\psi^\circ|^{\mathbf{v}}$. Assim:

$$\begin{aligned} |(\varphi \wedge \psi)^\circ|^{\mathbf{x},\mathbf{v}} &\equiv |\varphi^\circ \otimes \psi^\circ|^{\mathbf{x},\mathbf{v}} \\ &\equiv |\varphi^\circ|^{\mathbf{x}} \otimes |\psi^\circ|^{\mathbf{v}}, \end{aligned}$$

   o que demonstra o pretendido.

   No caso de fórmulas da forma $\varphi \vee \psi$,

$$\begin{aligned} \equiv |(\varphi \vee \psi)^\circ|^{\mathbf{x},\mathbf{y},z} &\equiv |\varphi^\circ \oplus \psi^\circ|^{\mathbf{x},\mathbf{v},z} \\ &\equiv |\varphi^\circ|^{\mathbf{x}} \diamond_z |\psi^\circ|^{\mathbf{v}}. \end{aligned}$$

Para fórmulas da forma $\varphi \to \psi$, tem-se:

$$\begin{aligned} |(\varphi \to \psi)^\circ|^{\mathbf{g}} &\equiv |!(\varphi^\circ \multimap \psi^\circ)|^{\mathbf{g}} \\ &\equiv !(\forall x\ |\varphi^\circ \multimap \psi^\circ|^{\mathbf{g}}_x) \\ &\equiv !(\forall x\ (|\varphi^\circ|^x \multimap |\psi^\circ|^{\mathbf{g}x})), \end{aligned}$$

o que demonstra que $|(\varphi \to \psi)^\circ|$ não tem variáveis de desafio.

No caso de fórmulas da forma $\forall z\ \varphi$, consideramos o seguinte:

$$\begin{aligned} |(\forall z\ \varphi)^\circ|^{\mathbf{f}} &\equiv |!(\forall z\ \varphi^\circ)|^{\mathbf{f}} \\ &\equiv !(\forall x\ |\forall z\ \varphi^\circ|^{\mathbf{f}}_x) \\ &\equiv !(\forall x\ |\varphi^\circ(x)|^{\mathbf{f}x}); \end{aligned}$$

por último, o caso do quantificador existencial:

$$\begin{aligned} |(\exists z\ \varphi(z))^\circ|^{\mathbf{x},z} &\equiv |\exists z\ \varphi^\circ(z)|^{\mathbf{x},z} \\ &\equiv |\varphi^\circ(z)|^{\mathbf{x}}\ . \end{aligned}$$

2. Note-se que para demonstrar que $|\varphi^\circ|^{\mathbf{x}} \multimapboth\ !|\varphi^\circ|^{\mathbf{x}}$ é suficiente demonstrar que, para alguma fórmula $\tilde{\varphi}$, se tem $|\varphi^\circ|^{\mathbf{x}} \multimapboth\ !\tilde{\varphi}$, uma vez que nesse caso se tem $!|\varphi^\circ|^{\mathbf{x}} \multimapboth\ !!\tilde{\varphi} \multimapboth\ !\tilde{\varphi} \multimapboth |\varphi^\circ|^{\mathbf{x}}$, como se pretendia[4].

   O caso em que φ é fórmula atómica é simples; como se viu na demonstração de 1., neste caso temos que $|\varphi^\circ| \equiv !\varphi$, se $\varphi \not\equiv \perp$, e $|\perp^\circ| \equiv 0 \multimapboth\ !0$; nada mais há a demonstrar. Para a conjunção, tem-se o seguinte:

$$\begin{aligned} |(\varphi \wedge \psi)^\circ|^{\mathbf{x},\mathbf{v}} &\equiv |\varphi^\circ \otimes \psi^\circ|^{\mathbf{x},\mathbf{v}} \\ &\equiv |\varphi^\circ|^{\mathbf{x}} \otimes |\psi^\circ|^{\mathbf{v}} \\ &\multimapboth\ !\tilde{\varphi} \otimes !\tilde{\psi} && \text{(por hipótese de indução)} \\ &\multimapboth\ !(\tilde{\varphi}\ \&\ \tilde{\psi}) && \text{(Lema 2.2.2),} \end{aligned}$$

   o que conclui o pretendido; similarmente, para a disjunção, tem-se:

$$\begin{aligned} |(\varphi \vee \psi)^\circ|^{\mathbf{x},\mathbf{v},z} &\equiv |\varphi^\circ \oplus \psi^\circ|^{\mathbf{x},\mathbf{v},z} \\ &\equiv |\varphi^\circ|^{\mathbf{x}} \diamond_z |\psi^\circ|^{\mathbf{v}} \\ &\multimapboth\ !\tilde{\varphi} \diamond_z !\tilde{\psi} && \text{(por hipótese de indução)} \\ &\multimapboth\ !(!\tilde{\varphi} \diamond_z !\tilde{\psi}) && \text{(Lema 2.5.5).} \end{aligned}$$

[4] Provar que $!\theta \multimapboth\ !!\theta$, dada qualquer fórmula θ, é uma verificação simples.

Os casos $\varphi \to \psi$ e $\forall z\ \varphi(z)$ são imediatos[5], e o caso $\exists z\ \varphi(z)$ sai imediatamente do que se viu, para o caso existencial, na demonstração de 1. e da hipótese de indução.

□

Teorema 4.13. *Seja φ fórmula de IL^ω. Então*

$$|\varphi^\circ|^{\mathbf{x}} \multimapboth (\mathbf{x}\ \mathsf{mr}\ \varphi)^\circ.$$

Demonstração. Como se estaria à espera, o resultado demonstrar-se-á por indução na complexidade da fórmula φ. Se φ é fórmula atómica e $\varphi \not\equiv \bot$ o resultado segue sem dificuldade, já que $|\varphi^\circ|^{\mathbf{x}} \equiv\ !\varphi \equiv \varphi^\circ \equiv (\mathbf{x}\ \mathsf{mr}\ \varphi)^\circ$ com $\mathbf{x}$ a sequência vazia, por definição de mr no caso atómico. O caso de $\bot$ é simples, visto que $|\bot^\circ|^{\mathbf{x}} \equiv |0|^{\mathbf{x}} \equiv 0 \equiv \bot^\circ \equiv (\mathbf{x}\ \mathsf{mr}\ \bot)^\circ$, com $\mathbf{x}$ de novo a sequência vazia.

Consideremos agora o caso da conjunção. Temos:

$$\begin{aligned}
|(\varphi \wedge \psi)^\circ|^{\mathbf{x},\mathbf{v}} &\equiv |\varphi^\circ \otimes \psi^\circ|^{\mathbf{x},\mathbf{v}} \\
&\equiv |\varphi^\circ|^{\mathbf{x}} \otimes |\psi^\circ|^{\mathbf{v}} \\
&\overset{\text{H.I.}}{\multimapboth} (\mathbf{x}\ \mathsf{mr}\ \varphi)^\circ \otimes (\mathbf{v}\ \mathsf{mr}\ \psi)^\circ \\
&\equiv (\mathbf{x}\ \mathsf{mr}\ \varphi \wedge \mathbf{v}\ \mathsf{mr}\ \psi)^\circ \\
&\equiv (\mathbf{x}, \mathbf{y}\ \mathsf{mr}\ \varphi \wedge \psi)^\circ.
\end{aligned}$$

O caso da disjunção utilizará o Lema anterior. Com efeito, tem-se:

$$\begin{aligned}
|(\varphi \vee \psi)^\circ|^{\mathbf{x},\mathbf{v},z} &\overset{4.12.2}{\multimapboth}\ !|(\varphi \vee \psi)^\circ|^{\mathbf{x},\mathbf{v},z} \\
&\equiv\ !|\varphi^\circ \oplus \psi^\circ|^{\mathbf{x},\mathbf{v},z} \\
&\equiv\ !(|\varphi^\circ|^{\mathbf{x}} \diamond_z |\psi^\circ|^{\mathbf{v}} \\
&\equiv\ !\,((!(z = \mathrm{T}) \multimap |\varphi^\circ|^{\mathbf{x}}) \& (!(z = \mathrm{F}) \multimap |\psi^\circ|^{\mathbf{v}})) \\
&\overset{\text{H.I.}}{\multimapboth}\ !\,((!(z = \mathrm{T}) \multimap (\mathbf{x}\ \mathsf{mr}\ \varphi)^\circ) \& (!(z = \mathrm{F}) \multimap (\mathbf{v}\ \mathsf{mr}\ \psi)^\circ)) \\
&\overset{2.2.2}{\multimapboth}\ !(!(z = \mathrm{T}) \multimap (\mathbf{x}\ \mathsf{mr}\ \varphi)^\circ) \otimes\ !(!(z = \mathrm{F}) \multimap (\mathbf{v}\ \mathsf{mr}\ \psi)^\circ)) \\
&\overset{(*)}{\equiv}\ !((z = \mathrm{T})^\circ \multimap (\mathbf{x}\ \mathsf{mr}\ \varphi)^\circ) \otimes\ !((z = \mathrm{F})^\circ \multimap (\mathbf{v}\ \mathsf{mr}\ \psi)^\circ) \\
&\equiv (z = \mathrm{T} \to \mathbf{x}\ \mathsf{mr}\ \varphi)^\circ\ \otimes\ (z = \mathrm{F} \to \mathbf{v}\ \mathsf{mr}\ \psi)^\circ \\
&\equiv ((z = \mathrm{T} \to \mathbf{x}\ \mathsf{mr}\ \varphi) \wedge (z = \mathrm{F} \to \mathbf{v}\ \mathsf{mr}\ \psi))^\circ \\
&\equiv (\mathbf{x}, \mathbf{v}, z\ \mathsf{mr}\ \varphi \vee \psi)^\circ;
\end{aligned}$$

acima, utilizamos em (*) o facto de que, dada α fórmula atómica com $\alpha \not\equiv \bot$, $!\alpha \equiv \alpha^\circ$ (visto que $z = \mathrm{T}$ e $z = \mathrm{F}$ são fórmulas atómicas).

Para fórmulas da forma condicional, considere-se o seguinte:

[5] O leitor poderá convencer-se disto simplesmente analisando a demonstração dos casos correspondentes de 1.

$$\begin{aligned}
|(\varphi \to \psi)^\circ|^{\mathbf{g}} &\equiv |!(\varphi^\circ \multimap \psi^\circ)|^{\mathbf{g}} \\
&\equiv\ !(\forall x\ |\varphi^\circ \multimap \psi^\circ|^{\mathbf{g}}_{x}) \\
&\equiv\ !(\forall x\ (|\varphi^\circ|^{x} \multimap |\psi^\circ|^{\mathbf{g}x})) \\
&\overset{\text{H.I.}}{\multimap\!\!\circ}\ !(\forall x\ ((\mathbf{x}\ \mathsf{mr}\ \varphi)^\circ \multimap (\mathbf{g}\mathbf{x}\ \mathsf{mr}\ \psi)^\circ)) \\
&\overset{2.2.5}{\multimap\!\!\circ}\ !(\forall x\ !((\mathbf{x}\ \mathsf{mr}\ \varphi)^\circ \multimap (\mathbf{g}\mathbf{x}\ \mathsf{mr}\ \psi)^\circ)) \quad \text{(Lema 2.2.5)} \\
&\equiv\ !(\forall x\ \ ((\mathbf{x}\ \mathsf{mr}\ \varphi) \to (\mathbf{g}\mathbf{x}\ \mathsf{mr}\ \psi))^\circ) \\
&\equiv (\forall x\ \ ((\mathbf{x}\ \mathsf{mr}\ \varphi) \to (\mathbf{g}\mathbf{x}\ \mathsf{mr}\ \psi))^\circ \\
&\equiv (\mathbf{g}\ \mathsf{mr}\ (\varphi \to \psi))^\circ;
\end{aligned}$$

O caso de fórmulas da forma $\forall z\ \varphi$ é tratado como se segue:

$$\begin{aligned}
|(\forall z\ \varphi)^\circ|^{\mathbf{f}} &\equiv |!(\forall z\ \varphi^\circ)|^{\mathbf{f}} \\
&\equiv\ !(\forall x\ |\forall z\ \varphi^\circ|^{\mathbf{f}}_{x}) \\
&\equiv\ !(\forall x\ |\varphi^\circ(x)|^{\mathbf{f}x}) \\
&\overset{\text{H.I.}}{\multimap\!\!\circ}\ !(\forall x\ (\mathbf{f}x\ \mathsf{mr}\ \varphi)^\circ) \\
&\equiv (\forall x\ (\mathbf{f}x\ \mathsf{mr}\ \varphi))^\circ \\
&\equiv (\mathbf{f}\ \mathsf{mr}\ \forall x\ \varphi)^\circ \\
&\equiv (\mathbf{f}\ \mathsf{mr}\ \forall z\ \varphi)^\circ.
\end{aligned}$$

Finalmente, o caso da quantificação existencial é directo:

$$\begin{aligned}
|(\exists z\ \varphi(z))^\circ|^{\mathbf{x},z} &\equiv |\exists z\ \varphi^\circ(z)|^{\mathbf{x},z} \\
&\equiv |\varphi^\circ(z)|^{\mathbf{x}} \\
&\overset{\text{H.I.}}{\multimap\!\!\circ} (\mathbf{x}\ \mathsf{mr}\ \varphi(z))^\circ \\
&\equiv (\mathbf{x}, z\ \mathsf{mr}\ \exists z\ \varphi)^\circ
\end{aligned}$$

A prova fica assim concluída.

□

4.4 A Interpretação Funcional *Dialectica.*

Dedicaremos esta secção a demonstrar que a segunda instanciação apresentada para a interpretação de $!\varphi$ – que consiste em definir $!(\forall \mathbf{z} \sqsubset \mathbf{a}\ \varphi)$ como $\varphi[\mathbf{a}/\mathbf{z}]$ – corresponderá (de uma forma simples e elegante) à interpretação funcional *Dialectica.* Tal correspondência é dada pelo seguinte Teorema.

Teorema 4.14. *Seja φ uma fórmula de IL^ω. Tem-se:*

$$|\varphi^+|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \multimap\!\!\circ (\varphi_D(\mathbf{x};\mathbf{y}))^+.$$

Demonstração. A demonstração é feita, uma vez mais, por indução na complexidade da fórmula φ. O caso em que φ é fórmula atómica é trivial: se $\varphi \not\equiv \bot$, $|\varphi^+| \equiv |\varphi| \equiv \varphi \equiv \varphi_D \equiv (\varphi_D)^+$, e se $\varphi \equiv \bot$, temos que $|\bot^+| \equiv |0| \equiv 0 \equiv \bot^+ \equiv (\bot_D)^+$. O resultado segue.

Analisemos o caso da conjunção.

$$
\begin{aligned}
|(\varphi \wedge \psi)^+|^{\mathbf{x},\mathbf{v}}_{\mathbf{y},\mathbf{w}} &\equiv |\varphi^+ \& \psi^+|^{\mathbf{x},\mathbf{w}}_{\mathbf{y},\mathbf{w}} \\
&\equiv |\varphi^+|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \& |\psi^+|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}} \\
&\overset{\text{H.I.}}{\multimapboth} (\varphi_D(\mathbf{x};\mathbf{y}))^+ \ \& \ (\psi_D(\mathbf{v};\mathbf{w}))^+ \\
&\equiv (\varphi_D(\mathbf{x};\mathbf{y}) \wedge \psi_D(\mathbf{v};\mathbf{w}))^+ \\
&\equiv ((\varphi \wedge \psi)_D(\mathbf{x},\mathbf{v};\mathbf{y},\mathbf{w}))^+
\end{aligned}
$$

Para fórmulas da forma $\varphi \vee \psi$, tem-se:

$$
\begin{aligned}
|(\varphi \vee \psi)^+|^{\mathbf{x},\mathbf{v},z}_{\mathbf{y},\mathbf{w}} &\equiv |\varphi^+ \oplus \psi^+|^{\mathbf{x},\mathbf{v},z}_{\mathbf{y},\mathbf{w}} \\
&\equiv |\varphi^+|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \ \diamond_z \ |\psi^+|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}} \\
&\equiv \left(!(z = \mathrm{T}) \multimap |\varphi^+|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}\right) \ \& \ (!(z = \mathrm{F}) \multimap |\psi^+|^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}}) \\
&\overset{\text{H.I.}}{\multimapboth} (!(z = \mathrm{T}) \multimap (\varphi_D(\mathbf{x};\mathbf{y}))^+) \,\&\, (!(z = \mathrm{F}) \multimap (\psi_D(\mathbf{v};\mathbf{w}))^+) \\
&\equiv (!(z = \mathrm{T})^+ \multimap (\varphi_D(\mathbf{x};\mathbf{y}))^+) \,\&\, (!(z = \mathrm{F})^+ \multimap (\psi_D(\mathbf{v};\mathbf{w}))^+) \\
&\equiv (z = \mathrm{T} \to \varphi_D(\mathbf{x};\mathbf{y}))^+ \ \& \ (z = \mathrm{F} \to \psi_D(\mathbf{v};\mathbf{w}))^+ \\
&\equiv ((z = \mathrm{T} \to \varphi_D(\mathbf{x};\mathbf{y})) \wedge (z = \mathrm{F} \to \psi_D(\mathbf{v};\mathbf{w})))^+ \\
&\equiv ((\varphi \vee \psi)_D(\mathbf{x},\mathbf{v},z;\mathbf{y},\mathbf{w}))^+.
\end{aligned}
$$

Para fórmulas da forma $\varphi \to \psi$, basta considerar-se o seguinte:

$$
\begin{aligned}
|(\varphi \to \psi)^+|^{\mathbf{f},\mathbf{g}}_{\mathbf{x},\mathbf{w}} &\equiv |!\varphi^+ \multimap \psi^+|^{\mathbf{f},\mathbf{g}}_{\mathbf{x},\mathbf{w}} \\
&\equiv |!\varphi^+|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{fxw}} \multimap |\psi^+|^{\mathbf{gx}}_{\mathbf{w}} \\
&\equiv !|\varphi^+|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{fxw}} \multimap |\psi^+|^{\mathbf{gx}}_{\mathbf{w}} \\
&\overset{\text{H.I.}}{\multimapboth} !(\varphi_D(\mathbf{x};\mathbf{fxw}))^+ \multimap (\psi_D(\mathbf{gx};\mathbf{w}))^+ \\
&\equiv (\varphi_D(\mathbf{x};\mathbf{fxw}) \to \psi_D(\mathbf{gx};\mathbf{w}))^+ \\
&\equiv ((\varphi \to \psi)_D(\mathbf{f},\mathbf{g};\mathbf{x},\mathbf{w}))^+.
\end{aligned}
$$

Os casos dos quantificadores são ambos bastante simples, tendo-se, respectivamente,

$$
\begin{aligned}
|(\forall z \ \varphi)^+|^{\mathbf{f}}_{\mathbf{y},z} &\equiv |\forall z \ \varphi^+|^{\mathbf{f}}_{\mathbf{y},z} \\
&\equiv |\varphi^+|^{\mathbf{f}z}_{\mathbf{y}} \\
&\overset{\text{H.I.}}{\multimapboth} (\varphi_D(\mathbf{f}z;\mathbf{y}))^+ \\
&\equiv ((\forall z \ \varphi)_D(\mathbf{f};\mathbf{y},z))^+
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
|(\exists z \ \varphi)^+|^{\mathbf{x},z}_{\mathbf{y}} &\equiv |\exists z \ \varphi^+|^{\mathbf{x},z}_{\mathbf{y}} \\
&\equiv |\varphi^+(z)|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \\
&\overset{\text{H.I.}}{\multimapboth} (\varphi_D(\mathbf{x};\mathbf{y}))^+ \\
&\equiv ((\exists z \ \varphi)_D(\mathbf{x},z;\mathbf{y}))^+.
\end{aligned}
$$

Observamos que, embora $(\cdot)^+$ traduza fórmulas de IL^ω para $\mathsf{ILL_r}^\omega + P_\oplus + P_\exists$, visto que, como se verificou, estes princípios são interpretáveis, o sistema de verificação é ainda ILL_b^ω.

□

4.5 A Interpretação Funcional de Diller–Nahm.

Dedicaremos a presente (e última) secção a demonstrar que a terceira instanciação que apresentámos para a interpretação de $!\varphi$, $!\forall \mathbf{z} \in \mathbf{a}\ |\varphi|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{z}}$, corresponde à interpretação funcional de Diller–Nahm.

Teorema 4.15. *Seja φ fórmula arbitrária de IL^{ω}. Temos que*

$$|\varphi^+|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \multimapboth (\varphi_{\mathsf{dn}}(\mathbf{x};\mathbf{y}))^+.$$

Demonstração. A prova será feita por indução na complexidade de φ. Observamos que a interpretação aqui considerada difere da *Dialectica* apenas no que diz respeito a fórmulas da forma $!\varphi$. Por conseguinte, o único caso que nos resta tratar é o caso em que a fórmula é da forma $\varphi \to \psi$, visto que, na tradução $(\cdot)^+$, este é o único que faz surgir o conectivo !; todos os outros casos saem de modo análogo ao Teorema correspondente para a interpretação funcional de Gödel.

Vejamos então o caso condicional. Tem-se:

$$\begin{array}{lll}
|(\varphi \to \psi)^+|^{\mathbf{f},\mathbf{g}}_{\mathbf{x},\mathbf{w}} & \equiv |!\varphi^+ \multimap \psi^+|^{\mathbf{f},\mathbf{g}}_{\mathbf{x},\mathbf{w}} & \\
& \equiv |!\varphi^+|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{fxw}} \multimap |\psi^+|^{\mathbf{gx}}_{\mathbf{w}} & \\
& \equiv !(\forall \mathbf{y} \in \mathbf{fxw}\ |\varphi^+|^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}) \multimap |\psi^+|^{\mathbf{gx}}_{\mathbf{w}} & \\
& \overset{\text{H.I.}}{\multimapboth} !(\forall \mathbf{y} \in \mathbf{fxw}\ (\varphi_{\mathsf{dn}}(\mathbf{x};\mathbf{y}))^+) \multimap (\psi_{\mathsf{dn}}(\mathbf{gx};\mathbf{w}))^+ & \\
& \equiv !(\forall \mathbf{y} \in \mathbf{fxw}\ \varphi_{\mathsf{dn}}(\mathbf{x};\mathbf{y}))^+ \multimap (\psi_{\mathsf{dn}}(\mathbf{gx};\mathbf{w}))^+ & (*) \\
& \equiv (\forall \mathbf{y} \in \mathbf{fxw}\ \varphi_{\mathsf{dn}}(\mathbf{x};\mathbf{y}) \to \psi_{\mathsf{dn}}(\mathbf{gx};\mathbf{w}))^+ & \\
& \equiv ((\varphi \to \psi)_{\mathsf{dn}}(\mathbf{f},\mathbf{g};\mathbf{x},\mathbf{w}))^+; &
\end{array}$$

acima, na passagem assinalada com (*), utilizamos o facto de $(\forall z \in a\ \theta)^+ \equiv \forall z \in a\ \theta^+$; com efeito,

$$\begin{array}{ll}
(\forall z \in a\ \theta)^+ & \equiv (\forall z\ (z \in a \to \theta))^+ \\
& \equiv \forall z\ (!(z \in a)^+ \multimap \theta^+) \\
& \equiv \forall z\ (!(z \in a) \multimap \theta^+) \\
& \equiv \forall z \in a\ \theta^+.
\end{array}$$

A demonstração fica assim concluída. □

Notas Finais

Existem inúmeras interpretações funcionais, conhecidas e em estudo, algumas das quais parecem diferir consideravelmente entre si[6]. A (algo surpreendente) ideia de que estas diferenças pudessem esconder um fio condutor comum começou, possivelmente, por ser explorada por Paulo Oliva, no seu artigo *Unifying Functional Interpretations* [27]. Nele se apresenta uma interpretação funcional, dependente de dois parâmetros, cujas diferentes instanciações dão origem a diversas interpretações funcionais conhecidas. Em [28], o mesmo autor melhora a unificação, recorrendo à Lógica Linear Clássica (sobre todos os tipos finitos).

Embora esta última unificação permita já captar a realizabilidade modificada, a interpretação *Dialectica* de Gödel e a interpretação funcional de Diller–Nahm, Paulo Oliva e Gilda Ferreira conseguem, na co-autoria de [12], uma simples e elegante unificação (com tratamento uniforme dos vários conectivos e sem necessidade de *branching quantifiers*). São essencialmente os resultados deste último artigo que expusémos na presente dissertação.

Motivados pela intuição que a Lógica Linear Intuicionista fornece no âmbito da unificação das interpretações funcionais, os mesmos autores desenvolvem em [13] uma interpretação funcional parametrizada capaz de unificar interpretações funcionais mais recentes que se baseiam, não em testemunhas exactas, mas em majorantes para essas testemunhas: a realizabilidade modificada, a interpretação funcional limitada e a realizabilidade modificada confinada. O leitor interessado nestas interpretações poderá consultar [9], [10] e [11], respectivamente. Ao esforço de unificação das interpretações funcionais e/ou exploração do seu potencial a nível de aplicações outros investigadores se juntaram, além dos já citados, como Mircea–Dan Hernest e Jaime Gaspar.

Nos artigos [20] e [30], a ideia da unificação é utilizada como motivação para o surgimento e estudo das chamadas interpretações funcionais *híbridas* (onde, em [30], os contextos utilizados são já a Lógica Linear e a Lógica Linear Intuicionista), interpretações que resultam da combinação de várias interpretações distintas. Em [29] podemos encontrar uma adaptação de [27] ao contexto das Lógicas Linear e Linear Intuicionista. [15] segue numa direcção algo di-

[6]Considerem-se, a título de exemplo, duas que apresentámos na presente dissertação: a realizabilidade modificada e a *Dialectica*, cuja formalização (veja-se o Capítulo 1) mostra bem a sua dissemelhança!

ferente, debruçando-se ainda sobre unificação, mas desta vez de variantes da mesma interpretação funcional (nomeadamente, unificando uma variante–q da realizabilidade modificada e a sua variante dita *com verdade*).

Neste momento aguarda ainda publicação um artigo de Paulo Oliva, intitulado *Unifying functional interpretations: Past and future*, que constitui uma súmula do que já foi feito neste âmbito, e um levantamento de algumas possibilidades ainda por explorar.

Bibliografia

[1] J. Avigad e S. Feferman. Gödel's Functional ("Dialectica") Interpretation. Chapter V in: S. Buss (ed.), *Handbook of Proof Theory*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics **137**, Elsevier Science, 1998.

[2] J. Avigad e H. Towsner. Functional interpretations and inductive definitions. *Journal of Symbolic Logic* **74** : 1100-1120, 2009.

[3] J. Barwise (ed.). *Handbook of Mathematical Logic*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics **90**, North–Holland, Amsterdam, 1977.

[4] T. Brauner. *Introduction to Linear Logic*. Basic Research in Computer Science, Lecture Notes 96-6, 1996.

[5] R. Di Cosmo e D. Miller. Linear Logic. In: E. N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2010 Edition)*. URL = <http://plato.stanford.edu/archives/fall2010/entries/logic-linear/>.

[6] J. Diller e W. Nahm. Eine Variante zur Dialectica-Interpretation der Heyting-Arithmetik endlicher Typen. *Arch. Math. Logik Grundlagenforsch* **16** : 49-66, 1974.

[7] S. Feferman. Gödel's *Dialectica* interpretation and its two-way stretch. In: G. Gottlob, A. Leitsch e D. Mundici (eds.), *Computational Logic and Proof Theory: 3th Kurt Gödel Colloquium, KGC'93, Proceedings*, páginas 23-40. Lecture Notes In Computer Science **713**, Springer, Berlin, 1993.

[8] F. Ferreira. A new computation of the Σ–ordinal of KP_ω. *Journal of Symbolic Logic* **79**(1) : 306-323, 2014.

[9] F. Ferreira e A. Nunes. Bounded Modified Realizability. *Journal of Symbolic Logic* **71**(1) : 329-346, 2006.

[10] F. Ferreira e P. Oliva. Bounded Functional Interpretations. *Annals of Pure and Applied Logic* **135** : 73-112, 2005.

[11] G. Ferreira e P. Oliva. Confined modified realizability. *Mathematical Logic Quarterly* **56**(1) : 13-28, 2010.

[12] G. FERREIRA E P. OLIVA. Functional Interpretations of Intuitionistic Linear Logic. *Logical Methods in Computer Science* **7** : 1-22, 2011.

[13] G. FERREIRA E P. OLIVA. On Bounded Functional Interpretations. *Annals of Pure and Applied Logic* **163**(8) : 1030-1049, 2012.

[14] J. GASPAR. *Em Torno das Interpretações Funcionais da Aritmética*. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade de Lisboa, 2007.

[15] J. GASPAR E P. OLIVA. Proof Interpretations with Truth. *Mathematical Logic Quarterly* **56**(6) : 591-610, 2010.

[16] G. GENTZEN. Untersuchungen über das logische Schließen. *Mathematische Zeitschrift* **39** : 176-210, 1935.

[17] J.-Y. GIRARD. Linear Logic. *Theoretical Computer Science* **50**(1) : 1-102, 1987.

[18] J.-Y. GIRARD. Linear Logic: its syntax and semantics. In: *Advances in Linear Logic*, London Mathematical Society Lecture Notes **222**, 1995.

[19] K. GÖDEL. Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes. *Dialectica* **12** : 208-287, 1958.

[20] M.-D. HERNEST E P. OLIVA. Hybrid Functional Interpretations. In: A. Beckmann, C. Dimitracopoulos e B. Löwe (eds.), *Logic and Theory of Algorithms: 4th Conference on Computability in Europe, CiE 2008, Proceedings*, páginas 251-260. Lecture Notes In Computer Science **5028**, 2008.

[21] W. A. HOWARD. A System of abstract constructive ordinals. *Journal of Symbolic Logic* **37**(2) : 355-374, 1972.

[22] S. KLEENE. On the interpretation of intuitionistic number theory. *Journal of Symbolic Logic* **10**(4) : 109-124, 1945.

[23] G. KREISEL. Interpretation of analysis by means of constructive functionals of finite types. In: Heyting, A. (ed.), *Constructivity in Mathematics.* North-Holland, Amsterdam, 101–128, 1959.

[24] U. KOHLENBACH. *Applied Proof Theory: Proof Interpretations and their Use in Mathematics.* Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin, 2008.

[25] Y. LAFONTE. Introduction to Linear Logic. In: Lecture notes from TEMPUS Summer School on Algebraic and Categorical Methods in Computer Science, Brno, Czech Republic, 1993.

[26] J. Moschovakis. Can there be nonrecursive functions?. *Journal of Symbolic Logic* **36**, 309-315, 1971.

[27] P. Oliva. Unifying Functional Interpretations. *Notre Dame Journal of Formal Logic* **47**(2) : 263-290, 2006.

[28] P. Oliva. Computational Interpretations of Classical Linear Logic. In: D. Leivant e R. de Queiroz (eds.), *Logic, Language, Information, and Computation: 14th International Workshop, WoLLIC 2007, Proceedings*, páginas 285-296. Lecture Notes In Computer Science **4576**, 2007.

[29] P. Oliva. Functional Interpretations of Linear and Intuitionistic Logic. *Information and Computation* **208**(5) : 565-577, 2010.

[30] P. Oliva. Hybrid Functional Interpretations of Linear and Intuitionistic Logic. *Journal of Logic and Computation* **22**(2) : 305-328, 2012.

[31] M. Szabo. *The Collected Papers of Gerhard Gentzen.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North Holland, Amsterdam, 1969.

[32] A. Tiu. *Model Checking for π–Calculus Using Proof Search.* In: *CONCUR 2005 – Concurrency Theory: 16th International Conference, CONCUR 2005, Proceedings.* Lecture Notes In Computer Science / Theoretical Computer Science and General Issues **3653**. Springer, Berlin, 2005.

[33] A. S. Troelstra. *Metamathematical Investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis.* Lecure Notes In Mathematics **344**. Springer, Berlin, 1973.

[34] A. S. Troelstra. *Lectures on Linear Logic.* Center for the Study of Language and Information – Lecture Notes **29**, Stanford, 1992.

[35] A. S. Troelstra. Realizability. Capítulo VI in: S. Buss (ed.), *Handbook of Proof Theory.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics **137**, 1998.

[36] A. S. Troelstra e D. van Dalen. *Constructivism in Mathematics: Volume I.* North–Holland, Amsterdam, 1988.

[37] D. van Dalen. *Logic and Structure.* Universitext. Springer, Berlin, 4ª edição, 2004.

[38] R. E. Vesley. A Palatable Substitute for Kripke's Schema. In: A. Kino, J. Myhill e R. E. Vesley (eds.), *Intuitionism and Proof Theory: Proceedings of the summer conference at Buffalo, N.Y. 1968.* North–Holand, Amsterdam, 1970.